САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра Статистической физики

Уравнения стохастической динамики в окрестности λ-точки

Выпускная квалификационная работа студента 406 группы

Жаворонкова Юрия Александровича

Научный руководитель:
д.ф. - м.н., профессор Налимов М.Ю.

Рецензент:
д.ф. - м.н., профессор Антонов Н.В.

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

1 Введение

Настоящая работа посвящена изучению явления Бозе-конденсации. Актуальность данного направления исследования подтверждается многочисленными работами как теоретического, так и экспериментального характера. Ярким примером может служить нобелевская премия, полученная в 2001 году Эриком Корнеллом, Карлом Виманом и Вольфгангом Кеттерле «за достижение конденсации Бозе — Эйнштейна в разреженных газах щелочных металлов и за начальные фундаментальные исследования свойств конденсатов».

Явление Бозе-конденсации, как известно, наблюдается вблизи нулевой температуры, то есть в окресности λ-точки фазового перехода. На сегодняшний день в большинстве работ, относящихся к данной тематике, используются модели, подразумевающие, что исследуемое вещество представляет собой газ щелочного металла, а не жидкий гелий, как это было ранее. Поэтому видится очевидной необходимость учёта сжимаемости в таких системах.

В работе была предпринята попытка построения модели, способной описывать динамику квантовой жидкости на основе стохастических уравнений типа Ланжевена, приводящих на больших временах к равновесному распределению в рамках критической гидродинамики. В стохастической динамике речь идет о случайных величинах и их статистическом распределении. Стохастичность порождается внутренними причинами — хаотическими соударениями из-за теплового броуновского движения, спонтанным возникновением и взаимодействием вихрей в турбулентном потоке и т.д. Стохастичность моделируется путем включения в уравнения динамики «шума»—случайных сил или других случайных параметров с простым распределением (обычно гауссовым). Распределение задаётся коррелятором шума, который подбирается из физических соображений.

Стандартная задача стохастической динамики формулируется следующим образом:

$$\partial_t \varphi(x) = U(x;\varphi) + \eta(x),$$

$$\langle \widehat{\eta}(x)\widehat{\eta}(x')\rangle = D(x,x').$$

Поясним обозначения: $x \equiv (t,\vec{x})$, $\varphi(x)$ — искомое поле (система полей), $U(x;\varphi)$ — заданный t-локальный функционал, не содержащий производных φ по времени, $\widehat{\eta}(x)$ — случайная внешняя сила, а $\eta(x)$ — любая конкретная её реализация. Для $\widehat{\eta}$ предполагается гауссово распределение с нулевым средним $\langle\widehat{\eta}(x)\rangle = 0$. В стандартной постановке задачи также принято считать, что поле (система полей) φ обращается в нуль при $t \to -\infty$, и при $|x| \to \infty$.

Важным для нас уравнением является стохастическое уравнение Ланжевена. Стохастическое уравнение Ланжевена описывает простейшие варианты динамики с заданным статистическим действием $S_{st}(\varphi)$ - функционалом от не содержащего времени поля $\varphi(x)$:

$$\partial_t \varphi(x) = \alpha \Big[\frac{\delta S_{st}(\varphi)}{\delta\varphi(\vec{x})}\Big]\Big|_{\varphi(\vec{x})\to\varphi(x)} + \eta(x),$$

$$\langle \widehat{\eta}(x)\widehat{\eta}(x')\rangle = 2\alpha\delta(x-x').$$

Входящий сюда кинетический коэффициент Онзагера α — не зависящая от $\varphi(x)$ симметричная линейная операция, действующая только на аргумент $\vec{x}$. Конкретный выбор коррелятора определяется требованием взаимной согласованности динамики и статики.

В результате удалось построить модель, описывающую динамику Бозе-газа вблизи точки фазового перехода с учётом сжимаемости. Фактически построенная модель представляет собой модель квантовой гидродинамики.

2 Модель F стохастической динамики

Традиционное описание критической динамики производится с помощью уравнений Ланжевена, приводящих при больших временах к равновесному распределению Гиббса. Равновесное распределение имеет вид $f \sim e^{S_{st}}$. S_{st} — стационарное действие, вид которого зависит от природы изучаемого явления.

Рассматриваемая модель F стохастической динамики используется для описания критической динамики перехода от нормальной к сверхтекучей жидкости в He_4. Так же, как и большинство других моделей стохастической динамики, модель F применима и для описания магнетиков.

В качестве стационарного действия для модели F стохастической динамики принимается:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 + mh, \tag{1}$$

где поля ψ, ψ^+ — комплексный параметр порядка (средние бозонных операторов поля $\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi}^+$), m — линейная комбинация внутренней энергии и плотности, эффективно описывающая флуктуации температуры.

Уравнения Ланжевена модели, в таком случае, известны [1]:

$$\partial_t\psi = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi^+}, \tag{2}$$

$$\partial_t m = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \eta_m, \tag{3}$$

$$\partial_t\psi^+ = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_\psi. \tag{4}$$

Для учёта гидродинамики в исходную модель необходимо добавить максвелловский член $v^2/2$. Сначала приведем модель несжимаемой жидкости ($\partial_i v_i = 0$) [2]. В таком случае S_{st} имеет вид:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}v^2 + mh, \tag{5}$$

где v — добавленное поле скорости.

Аналогично со случаем модели F без гидродинамических мод можно написать уравнения Ланжевена, соответствующие данному действию:

$$\partial_t\psi + \partial_i(v_i\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi^+}, \tag{6}$$

$$\partial_t m + \partial_i(v_i m) = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \eta_m, \tag{7}$$

$$\partial_t\psi^+ + \partial_i(v_i\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_\psi, \tag{8}$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2 v - \partial_i(v_i v) - \psi^+\partial\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big]$$
$$-\psi\partial\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - m\partial\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_v. \tag{9}$$

Здесь и далее ∂ — дифференцирование по пространственной компоненте, ∂^2 — оператор Лапласа.

В уравнениях (6)–(9) возникают члены вида $\partial(v\varphi_a)$, где φ_a — поля m,ψ,ψ^+, v. Отметим, что $\partial(v\varphi_a) = v\partial(\varphi_a)$ ввиду равенства нулю ∂v, следующего из того, что жидкость является несжимаемой.

Уравнение (9) является уравнением Навье-Стокса с добавочными членами, необходимыми для существования стационарного предела в модели F.

Известно, что для того, чтобы система уравнений (6)–(9) при больших временах приводила к равновесному распределению $f \sim e^{s_{st}}$, где S_{st} взято из (5), необходимо выполнение уравнения Фоккера-Планка [1]:

$$\partial_t P = -\frac{\delta}{\delta\varphi_a}\Big((\alpha_{a,b}+\beta_{a,b})\frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{a,b}\frac{\delta}{\delta\varphi_b}\Big)P, \tag{10}$$

где P — функция распределения одновременных флуктуаций, $\alpha_{a,b}$ — коэффициенты Онзагера, $\beta_{a,b}$ — коэффициенты межмодовой связи соответствующей пары полей, а φ_a, φ_b — одно из полей m,v,ψ,ψ^+. Само уравнение (10) возникает из уравнений движения. С учётом того, что для P также должно выполняться $P \sim e^{S_{st}}$, уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_a}\Big((\alpha_{a,b}+\beta_{a,b})\frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{a,b}\frac{\delta}{\delta\varphi_b}\Big)e^{S_{st}} = 0, \tag{11}$$

Уравнение Фоккера-Планка указывает нам на то, что уравнения Ланжевена являются связанными между собой, что приводит нас к необходимости внесения изменений в одно уравнение при изменении другого.

Из уравнения (11) явно следуют достаточные условия, налагаемые на коэффициенты Онзагера и коэффициенты межмодовой связи:

$$\beta_{ab} = -\beta^T_{ba}, \tag{12}$$

$$\frac{\delta\beta_{ab}(\vec{x};\varphi)}{\delta\varphi_a(\vec{x})} = 0, \tag{13}$$

$$\alpha_{ab} = \alpha^T_{ba}. \tag{14}$$

Символ транспонирования «T» относится к операциям типа ∂ в коэффициентах α_{ab} и β_{ab}, то есть в целом $\alpha = \alpha^T$, $\beta = -\beta^T$.

Нетрудно заметить, что общий вид уравнения Ланжевена в задачах стохастической динамики имеет вид:

$$\partial_t\varphi_a = (\alpha_{ab}+\beta_{ab})\frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} + \eta_a. \tag{15}$$

Для дальнейших выкладок будет удобно показать справедливость уравнения (11) для этой модели [2]. Итак, покажем как будет записываться уравнение (11) в таком случае:

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\Big[-v_i\partial_i\psi + \lambda(1+ib)[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi] + i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m + h] - \lambda\frac{\delta}{\delta\psi^+}\Big]e^{S_{st}}$$

$$+\frac{\delta}{\delta\psi^+}\Big[-v_i\partial_i\psi^+ + \lambda(1-ib)[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+] - i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m + h] - \lambda\frac{\delta}{\delta\psi}\Big]e^{S_{st}}$$

$$+\frac{\delta}{\delta m}\Big[-\partial_i(v_i m) - \lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m + h] + i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] + \lambda u\partial^2\frac{\delta}{\delta m}\Big]e^{S_{st}}$$

$$+\frac{\delta}{\delta v}\Big[\nu\partial^2 v - \partial_i(v_i v) - \psi^+\partial[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\Big] - \psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]$$

$$-m\partial\Big[g_2\psi^+\psi - m + h\Big] - \nu\partial^2\frac{\delta}{\delta v}\Big]e^{S_{st}} = 0 \qquad (16)$$

Удобно записать матрицу коэффициентов Онзагера и матрицу коэффициентов межмодовой связи [4]:

$$\alpha_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda u\partial^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu\partial^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda b & i\lambda g_3\psi & \psi\partial \\ -i\lambda b & 0 & -i\lambda g_3\psi^+ & \psi^+\partial \\ -i\lambda g_3\psi & i\lambda g_3\psi^+ & 0 & m\partial \\ -\psi\partial & -\psi^+\partial & -m\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (16) и полученных матриц можно сделать следующие заключения:

1) Члены с множителями β уравнения Фоккера-Планка действительно сокращаются согласно (12).

2) Члены с множителями α, в свою очередь, как видно из уравнения Фоккера-Планка (16), сокращаются с $\delta/\delta\varphi_b$ из (11).

Отдельных комментариев заслуживает тот факт, что в β-матрице равным нулю оказался член β_{vv}. Это объясняется тем, что этот член сокращается сам с собой в уравнении (16), что нетрудно продемонстрировать:

$$-\frac{\delta}{\delta v}[\partial_i(v_i v)]e^{S_{st}} = -\frac{\delta}{\delta v}[v\partial_i(v_i) + v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}} = -\frac{\delta}{\delta v}[v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}},$$

Здесь было учтено, что $\partial_i v_i = 0$. Теперь, подействовав вариационной производной на выражения, и учтя, что $e^{S_{st}}$ сокращается всюду в уравнении Фоккера-Планка как множитель, стоящий при каждом из членов, получим:

$$-\frac{\delta}{\delta v}[v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}} \Rightarrow -[v_i\partial_i] - [v_i\partial_i(v)]v = [\partial_i(v_i)] - [v_i\partial_i(\frac{v^2}{2})]$$

$$= -[\partial_i(v_i\frac{v^2}{2})] + [(\frac{v^2}{2})\partial_i(v_i)] = 0.$$

Окончательный результат был получен путём взятия каждого из интегралов по частям. Член $[(\frac{v^2}{2})\partial_i(v_i)]$ оказался равным нулю как интеграл от полной производной при учёте соглашения $v(\infty) = v(-\infty) = 0$.

3 Модификация модели

Для того чтобы определить, каким образом должны измениться уравнения движения, обратимся к стандартному виду уравнения Навье-Стокса [3]:

$$\rho\big[\partial_t\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\big] = -\mathrm{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3})\mathrm{grad}\,\mathrm{div}(\vec{v}), \qquad (17)$$

где η — сдвиговая вязкость, ζ — объёмная вязкость, P — давление, ρ — плотность.

Рассмотрение случая несжимаемой жидкости приводит к необходимости учёта дополнительных членов в уравнении (9).

По аналогии с уравнением Навье-Стокса в уравнении (9) будут присутствовать член с давлением и член с объёмной вязкостью. Их отсутствие ранее объясняется равенством нулю $\mathrm{div}v$, следующим из поперечности поля скорости. Таким образом, в уравнение (9) в случае сжимаемой жидкости необходимо добавить отсутствовавшие в случае несжимаемой жидкости члены вида:

$$1)\quad \frac{1}{\rho}(\zeta+\frac{\eta}{3})\mathrm{graddiv}(\vec{v}), \tag{18}$$

$$2)\quad \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P. \tag{19}$$

Также необходимо учесть и то, что члены вида $\varphi_a\partial_i v_i$ более не являются нулевыми. Это приводит нас к необходимости делать выбор в пользу вида записи в качестве конвективного члена $\partial(v\varphi_a)$ или члена соответствующего переносу поля $v\partial(\varphi_a)$ в уравнениях движения нашей модели. Выбор формы записи будет определяться наличием закона сохранения на то или иное поле.

Рассмотрим как в таком случае будет меняться система уравнений по сравнению с моделью F, в которой поле скорости считается поперечным. Поясним, каким образом осуществлялся выбор вида системы уравнений, а также покажем, что так записанная система обладает стационарным пределом, то есть для неё выполняется уравнение (11).

Сперва стоит пояснить, почему использование модели F с учётом поперечности поля скорости не годится для описания гидродинамики сжимаемой жидкости.

Во-первых, как было указано выше, сама система уравнений (6)–(9) более не является точно определённой ввиду того, что равенство $\partial(v\varphi_a) = v\partial(\varphi_a)$ теперь не выполняется, а следовательно, возникает необходимость в выборе того или иного вида записи этих членов. Этот выбор не является произвольным, из-за того что для одних полей справедливо наличие закона сохранения, а для других — нет. А потому выбор из двух вариантов наиболее простого и удобного невозможен.

Во-вторых, уравнение на поле скорости v в нашем случае необходимо дополнить членами, которые справедливы для уравнения Навье-Стокса, описывающего сжимаемую жидкость. Добавление новых членов в одно из уравнений приведёт к изменению других, связанных с данным, уравнений.

Как будет показано далее, учёт сжимаемости главным образом влияет на вид записи уравнения на поле v.

Итак, начнём с того, что определим, для каких из полей следует писать закон сохранения.

Для полей ψ,ψ^+ как для полей параметра порядка закона сохранения нет, а потому форма записи соответствующих членов выбирается в виде $v_i\partial_i\varphi'$, где φ' поле ψ или ψ^+.

Поле m есть поле, отвечающее за плотность и внутреннюю энергию. Для него, очевидно, наличие закона сохранения является физически обоснованным. В таком случае необходимо соответствующий член из уравнения на m записывать в виде $\partial_i(mv_i)$.

В уравнении на поле v необходимо использовать член вида $v_i\partial_i v$, так как соответствующая форма записи используется в уравнении Навье-Стокса (17).

Таким образом, по сравнению с моделью [2] мы получили следующие изменения рассматриваемых членов:

$$\partial_i(v_i\psi) \to v_i\partial_i(\psi),$$

$$\partial_i(v_i\psi^+) \to v_i\partial_i(\psi^+),$$

$$\partial_i(v_i v) \to v_i\partial_i(v).$$

Для того чтобы написать уравнение на поле скорости v, нужно определиться с тем, как член со второй вязкостью и член с градиентом давления из уравнения (17) будут выглядеть в рамках нашей модели.

В качестве члена, представленного в уравнении (18), будем использовать $\xi \partial_j \partial_i v_i$, здесь $\xi = \frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{\eta}{3})$. В свою очередь, член (19) требуется преобразовать таким образом, чтобы он мог быть представлен через используемые в модели поля. Для этого достаточно воспользоваться формулой, связывающей плотность с давлением. Приведем её:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S,$$

где c — скорость звука. В таком случае (19) можно записать в виде:

$$\frac{c^2}{\rho}\partial_i \rho.$$

Однако известно, что в данной науке оказывается удобно члены в уравнениях Ланжевена представлять в виде $\delta S_{st}/\delta\varphi_a$ с некоторым множителем (даже записывая их иначе такой вид впоследствии будет получен в результате ренормировки), а потому окончательно добавка в уравнение на поле v будет выглядеть:

$$\frac{c^2}{\rho}\partial_i \frac{\delta S_{st}}{\delta m},$$

где

$$\frac{\delta S_{st}}{\delta m} = g_2 \psi^+ \psi - m + h.$$

Выбор $\delta S_{st}/\delta m$ также обусловлен наличием в нём поля m, отвечающего в том числе и за плотность.

Итак, покажем уравнения, полученные на данном этапе:

$$\partial_t \psi + v_i \partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3 \psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi^+}, \tag{20}$$

$$\partial_t m + \partial_i(v_i m) = -\lambda u \partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \eta_m, \tag{21}$$

$$\partial_t \psi^+ + v_i \partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3 \psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi}, \tag{22}$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2 v + \xi\partial\partial_i v_i - v_i\partial_i(v) - \psi^+\partial\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{23}$$

$$-\frac{c^2}{\rho}\partial(g_2\psi^+\psi - m + h) - \psi\partial\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - m\partial\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_v.$$

Однако, как нетрудно видеть, такая система не является системой уравнений Ланжевена с известным статическим пределом. В частности, $v_i\partial_i(v)$, а также $\frac{c^2}{\rho}\partial_i(g_2\psi^+\psi - m + h)$ из (23), нарушают выполнение соотношения (11). Также учёт сжимаемости привёл к появлению ещё одного препятствия к получению системы, приводящей к стационарности. Члены уравнения Фоккера-Планка, порождённые $-\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]$ из (23) и $v_i\partial_i(\psi)$ из (20), более не сокращают друг друга. Покажем это, воспользовавшись уже известным подходом:

$$-\frac{\delta}{\delta v_i}\Big[\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]\Big]e^{S_{st}} - \frac{\delta}{\delta\psi}[v_i\partial_i(\psi)]e^{S_{st}}$$

$$= -\Big[\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]\Big]\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}} - [v_i\partial_i(\psi)]\frac{\delta S_{st}}{\delta\psi}e^{S_{st}}$$

$$= -\psi\partial_i[\frac{\delta S_{st}}{\delta\psi}]\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}} - \partial_i(\psi)\frac{\delta S_{st}}{\delta\psi}\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}}$$

$$= -\Big[\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]\Big]v_i e^{S_{st}} - [v_i\partial_i(\psi)]\Big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\Big]e^{S_{st}}$$

Здесь были подставлены $\partial S_{st}/\partial\psi$ и $\partial S_{st}/\partial v_i$. Очевидно, это равенство выполнялось в случае несжимаемой жидкости, теперь же, ввиду того, что $\partial_i v_i \neq 0$, члены не сокращаются. Для решения данной проблемы было предложено изменить коэффициент межмодовой связи в уравнении на поле v:

$$-\psi\partial \to -\partial(\psi).$$

Как нетрудно заметить такая замена позволить сократить соответствующие члены в уравнении Фоккера-Планка. Применение аналогичных рассуждений справедливо и для членов $v_i\partial_i(\psi^+)$ из (22) и -$\psi^+\partial[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi]$ из (23), поскольку эта пара членов отличается от предыдущей лишь комплексным сопряжением.

Все остальные члены системы уравнений Ланжевена не претерпели изменений, а значит, для них всё ещё справедливыми оказываются выкладки из модели [2]. Можно записать вклад члена $v_i\partial_i(v)$ в уравнение Фоккера-Планка:

$$-\frac{\delta}{\delta v_i}[v_j\partial_j(v_i)]e^{S_{st}} = \delta_{ij}\partial_j(v_i)e^{S_{st}} - \partial_j(v_j)e^{S_{st}} + [v_j\partial_j(v_i)]\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}}$$

здесь второе слагаемое было получено путем взятия интеграла по частям. Заметим, что первое и второе слагаемые обнуляются как интегралы от полной производной. Таким образом, следует отдельно рассмотреть третье слагаемое. Для этого учтём, что $\delta S_{st}/\delta v_i = -v_i$:

$$\frac{\delta}{\delta v_i}[v_j\partial_j(v_i)]e^{S_{st}} = -[v_j\partial_j(v_i)]v_i e^{S_{st}} \neq 0. \tag{24}$$

В случае со вторым членом достаточно внести необходимую поправку в уравнение на поле m. Эту поправку можно представить в виде:

$$\frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i).$$

Однако, если учесть тот факт, что ρ не является величиной постоянной, а должно зависеть от поля m, которое, как упоминалось ранее, есть поле, ответственное, в частности, за флуктуации плотности, выясняется, что и такая замена не помогает добиться желаемого результата. Покажем это, выписав соответствующие члены из уравнения Фоккера-Планка:

$$\frac{\delta}{\delta v}[\frac{c^2}{\rho}\partial_i(g_2\psi^+\psi - m + h)]e^{S_{st}} + \frac{\delta}{\delta m}[\frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i)]e^{S_{st}} \neq 0. \tag{25}$$

Связь ρ с m можно представить в виде:

$$\rho = \rho_\lambda + (\frac{\partial\rho}{\partial m})m,$$

где $\partial\rho/\partial m$ некоторая постоянная величина, которая может быть приравнена единице путём растяжения полей, а ρ_λ — некоторая постоянная плотность исследуемого флюида вблизи λ-точки.

Итак, мы приходим к выводу, что данная модель всё ещё нуждается в доопределении. Последующие изменения должны быть направлены на устранение упомянутых проблем модели и уже несут искусственный характер.

Для этого было предложено, в первую очередь, внести изменения в вид стационарного действия. Максвелловский член $v^2/2$ из уравнения (5) необходимо заменить на $\rho v^2/2$.

Такая необходимость вызвана тем, что плотность вещества в модели со сжимаемой жидкостью перестаёт быть величиной постоянной, а значит, невозможно добиться равенства её единице путём растяжения, как было сделано в модели [2].

Таким образом, стационарное действие нашей модели приобретает вид:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \rho\frac{v^2}{2} + mh, \tag{26}$$

Такое изменение моментально приводит к новому виду всей системы уравнений:

$$\partial_t\psi + \rho v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_{\psi^+}, \tag{27}$$

$$\partial_t m + \partial_i[v_i\rho m] = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i) + \eta_m, \tag{28}$$

$$\partial_t\psi^+ + \rho v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_\psi, \tag{29}$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2[\rho v] + \zeta\partial\partial_i v_i - \rho v_i\partial_i[v] - \partial(\psi^+)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big]$$

$$-\frac{c^2}{\rho}\partial(g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}) - \partial(\psi)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - \rho\partial\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_v. \tag{30}$$

Как можно заметить, во всех уравнениях системы, как и в S_{st}, появляются члены вида ρv_i, поэтому будет удобно ввести новое поле:

$$p_i \equiv \rho v_i. \tag{31}$$

Введённое поле импульса p_i заменит в нашей системе поле скорости v_i. Такая замена приводит к появлению нового уравнения движения.

При построении уравнения на поле v, мы отталкивались от вида уравнения Навье-Стокса (17), теперь посмотрим, как изменится (17) при замене $p = \rho v$:

$$\partial_t p = -\nabla_i(pv_i) - \mathrm{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3})\mathrm{graddiv}(\vec{v}). \tag{32}$$

Стационарное действие модели при замене (31):

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho} + mh, \tag{33}$$

Приведём систему уравнений с учётом (31) и (32):

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{34}$$

$$+i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi^+},$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] \tag{35}$$

$$-i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_\psi,$$

$$\partial_t m + \partial_i(p_i) = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] \tag{36}$$

$$+i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] - c^2\partial_i(v_i) + \eta_m,$$

$$\partial_t p_i = \eta\partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\eta}{3})\partial_j\partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{37}$$

$$-\partial_i(\psi)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - c^2\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big]$$

$$-\rho\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_p.$$

Для нас оказалось удобным, что $\delta S_{st}/\delta p = -v$, это заметно упростило запись уравнений Ланжевена. Более того, переход к полю импульса позволил нам избавиться от проблемы, возникшей в (28), поскольку $c^2\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h + \frac{v^2}{2}]$ из (37) не содержит в качестве множителя $1/\rho$, а значит, подобрать компенсирующий его в уравнении Фоккера-Планка член из уравнения на поле m становится нетрудно, и в нашем случае он равен $c^2\partial_i(v_i)$.

Обратим внимание на уравнение (36). В отличие от (28), где имелся член $\partial_i[v_i\rho m]$ теперь в (36) мы пишем $\partial_i[p_i] \equiv \partial_i[\rho v_i]$. Такое изменение оказалось возможным благодаря тому что, мы фактически перешли от уравнение на m к уравнению на ρ, воспользовавшись тем, как связаны эти величины, а также формой уравнения (28), позволяющей провести такую замену без изменения структуры уравнения.

В результате многочисленных преобразований, в уравнении на поле p у нас появились члены, требующие дополнительного анализа на предмет их влияния на существование стационарного предела. Это члены:

$$c^2\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}], \tag{38}$$

$$(\zeta + \frac{\eta}{3})\partial_i(\partial_j v_j), \tag{39}$$

$$\partial_j(p_i v_j). \tag{40}$$

С влиянием (38) мы разобрались в одном из предыдущих шагов, введя новый член в уравнение на поле m.

Члены (39), (40) стоит обсудить подробнее. Член (39) совместно с $\eta\partial^2 v_i$ можно представить в виде $\alpha(\delta S_{st}/\delta p)$, следовательно, он не влияет на существование стационарного предела.

Член (40) в уравнении Фоккера-Планка частично сокращается благодаря $\partial_i(p_i)$ из (36). Покажем это:

$$-\frac{\delta}{\delta m}\big[\partial_i(p_i)\big]e^{S_{st}} - \frac{\delta}{\delta p_i}\big[\partial_j(p_i v_j)\big]e^{S_{st}} = \big[\partial_i(p_i)\big]\frac{\delta S_{st}}{\delta m}e^{S_{st}} - \big[\partial_j(p_i v_j)\big]\frac{\delta S_{st}}{\delta p_i}e^{S_{st}}$$

$$= -[\partial_i(p_i)]\big[g_2\psi^+\psi - m + h + -\frac{v^2}{2}\big]e^{S_{st}} - \big[\partial_j(p_i v_j)\big]v_i e^{S_{st}} = -[\partial_i(p_i)]\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big]e^{S_{st}}. \tag{41}$$

То, что остаётся, должно сокращаться с единственным нерассмотренным членом уравнения (37):

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}], \tag{42}$$

который в уравнении Фоккера-Планка образует слагаемое

$$-\frac{\delta}{\delta p_i}\Big[\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}]\Big]e^{S_{st}}. \tag{43}$$

Очевидно, что для того, чтобы (41) было равно (43), необходимо внести изменение в член (42) из уравнения на поле p. Вместо (42) нам следует писать:

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h]. \tag{44}$$

Тогда (43) переписывается в виде:

$$-\frac{\delta}{\delta p_i}\Big[\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h]\Big]e^{S_{st}}. \tag{45}$$

Теперь, проинтегрировав (45) по частям, мы получаем то же выражение, что и (46), только с обратным знаком, что и доказывает наличие стационарного предела нашей модели.

Приведём окончательный вид уравнений Ланжевена и S_{st}:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho} + mh, \tag{46}$$

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{47}$$

$$+i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi^+},$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] \tag{48}$$

$$-i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi},$$

$$\partial_t m + \partial_i(p_i) = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] \tag{49}$$

$$+i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] - c^2\partial_i(v_i) + \eta_m,$$

$$\partial_t p_i = \gamma\partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\eta}{3})\partial_j\partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{50}$$

$$-\partial_i(\psi)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - c^2\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big]$$

$$-\rho\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_p,$$

где γ — переобозначенная во избежание совпадения со случайной силой η_{φ_a} первая вязкость из уравнения Навье-Стокса.

Как можно заметить, учёт сжимаемости жидкости усложняет вид уравнений Ланжевена по сравнению с моделью, в которой жидкость полагалась несжимаемой.

Приведем формулу:

$$S_{dyn} = \frac{\varphi_a^{'} D_{\varphi_a} \varphi_a^{'}}{2} - \varphi_a^{'} \Big(\partial_t \varphi_a + (\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} \Big). \tag{51}$$

С её помощью можно записать динамическое действие нашей модели.

Для случайных сил η_{φ_a} корреляторы представимы в виде:

$$D_{\varphi_a} = \langle \eta_{\varphi_a} \eta_{\varphi_a} \rangle = 2\alpha_{a,a} \delta(t - t') \tag{52}$$

Итак, запишем динамическое действие нашей модели:

$$S_{dyn} = 2\lambda(\psi^+)'\psi' - \lambda u m' \partial^2 m' + p' D_p p' - \psi' \Big(- v_i \partial_i(\psi) + \lambda(1 + ib)[\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi]$$
$$+ i\lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2} v^2] \Big) - \psi^{+'} \Big(- v_i \partial_i(\psi^+) + \lambda(1 - ib)[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]$$
$$- i\lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2} v^2] \Big) - m' \Big(- \partial_i(p_i) - \lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2} v^2]$$
$$+ i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] - c^2 \partial_i(v_i) \Big) - p' \Big(\eta \partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \partial_j \partial_i v_i - \partial_j (p_i v_j) - \partial_i(\psi^+)[\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi])$$
$$- \partial_i(\psi)[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+] - c^2 \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h + - \frac{v^2}{2}] - \rho \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h] \Big) \tag{53}$$

4 Заключение

В результате проделанной работы удалось написать систему стохастических уравнений Ланжевена с новым физически обоснованным стационарным пределом. Полученная модель является в своём роде аналогом уже известной модели H критической динамики. В отличие от модели H, которая используется для описания поведения классического флюида (в качестве управляющих параметров используются ψ, m, v), наша модель является пригодной для описания квантовой жидкости с учётом сжимаемости.

При детальном рассмотрении полученной системы (47)–(50) становится ясно, что появление члена $\partial_i v_i$ в (49), а также $\partial_i m$ в (50), приводит нас к необходимости дополнительного изучения этих членов в ходе размерного анализа модели, поскольку члены такого вида являются «опасными» в терминологии Васильева.

В настоящей работе был проделан лишь один из этапов изучения модели — её построение. Сравнивая построенную модель с моделью H, можно сказать, что в рамках данной модели ещё предстоит произвести размерный анализ с последующим поиском путей устранения проблем, возникающих при появлении вышеупомянутых членов, и проведение ренормировки, РГ-анализа.

Список литературы

[1] А.Н. Васильев, Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике.СПб., 1998. С. 545–606

[2] М. В. Комарова, Д. М. Краснов, М.Ю. Налимов, Бозе-конденсация: критическая размерность вязкости, развитая турбулентность Теорет. Мат. Физ., Том 169, №1, С. 89–99.

[3] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, Том VI Гидродинамика М. 2006. С. 71–76

[4] M. Dano, M. Hnatich, M. V. Komarova, D. M. Krasnov, T. Luivjansk, L. Miiin, M. Yu. Nalimov, Influence of hydrodynamic fluctuations on the phase transition in the E and F models of critical dynamics Theor. Math. Phys., 2013, Volume 176, Number 1, Pages 888–897