Санкт-Петербургский государственный университет

**Кафедра информационных систем**

**Щербинин Артем Владимирович**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**Функционально непрерывные методы**

**Рунге — Кутты с FSAL**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Еремин А. С.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

[Введение 3](#_Toc482634711)

[Постановка задачи 4](#_Toc482634712)

[Глава 1. Условия порядка для ФНРК методов с FSAL. 5](#_Toc482634713)

[1.1 Общие положения 7](#_Toc482634714)

[1.2 Второй порядок 8](#_Toc482634715)

[1.3 Третий порядок 8](#_Toc482634716)

[1.4 Четвертый порядок 9](#_Toc482634717)

[Глава 2. Конструирование явных ФНРК методов с FSAL 11](#_Toc482634718)

[2.1 Третий порядок 11](#_Toc482634719)

[2.2 Четвертый порядок 12](#_Toc482634720)

[Глава 3. Эксперименты 20](#_Toc482634721)

[Выводы 24](#_Toc482634722)

[Заключение 24](#_Toc482634723)

[Список литературы 25](#_Toc482634724)

Введение

Методы Рунге–Кутты являются самым распространенным инструментом для решения дифференциальных уравнений и их систем. Довольно большое число задач можно решать явными методами Рунге — Кутты. Однако с увеличением их порядка точности экспоненциально растет количество необходимых вычислений, что негативно сказывается на быстродействии вычислительных систем.

Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и более общих функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа (ФДУЗТ), необходимо использовать так называемые непрерывные расширения методов Рунге — Кутты [1], позволяющие вычислять решение в произвольных точках в прошлом, даже если эти точки ещё находятся внутри совершаемого шага (ситуация, называемая «перекрытием»). Для этого случая в работах [2], [3] представлены функционально непрерывные методы Рунге — Кутты (ФНРК), позволяющие сохранить полную явность реализации.

Количество этапов (вычислений правой части уравнения, определяющее трудоёмкость совершения одного шага), необходимых для достижения определённого порядка таких методов, куда больше, чем у методов Рунге — Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений. В то же время, представленные в [2], [3] методы допускают уменьшение количества требуемых этапов за счёт использования последнего этапа предыдущего шага в качестве первого этапа на текущем шаге. Этот приём называется в литературе «первый равен последнему» (first same as last, FSAL) [4] или «повторное использование» (reuse) [5].

Мы построим ФНРК со свойством FSAL для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Относительно методов РК для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в функционально непрерывных методах вектор весов и матрица коэффициентов заменены вектором и матрицей полиномиальных функций соответственно. Следует отметить, что данные методы для уравнений с запаздыванием отличаются от непрерывных методов РК, в которых только вектор весов заменен полиномиальными функциями. В свою очередь, свойство FSAL позволяет уменьшить необходимое количество вычислений правой части дифференциальной системы, тем самым повысив производительность метода.

Следуя [2] введем несколько обозначений:

* Пусть и есть пространство непрерывных функций , на которых введена максимальная норма   
  где — произвольная норма на .
* Для непрерывной функции и , где , пусть есть функция в , заданная уравнением

Постановка задачи

1. Вывести условия порядка для ФНРК с FSAL
2. Построить методы 3 и 4 порядка
3. Сравнить производительность полученных методов с известными методами, полученными в статье [3].

Глава 1. Условия порядка для ФНРК методов с FSAL.

Функциональное дифференциальное уравнение запаздывающего типа (ФДУЗТ) – это дифференциальное уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

где и есть открытое подмножество .

**Определение 1.1.** Пусть – положительное целое число. Явный функционально непрерывный метод Рунге–Кутты определяется тройкой , где

* есть матрица полиномиальных функций такая, что
* есть вектор полиномиальных функций такой, что

,

* ,
* .

Мы ищем решение задачи (1.1) через Положим, что шагов до уже совершены. ФНРК метод обеспечивает аппроксимацию решения для

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

где  
и функция этапа, вычисляемая по формуле

где есть численная аппроксимация по всем шагам

Условия и гарантируют и соответственно.

Предположим, что задача (1.1) решена на отрезке и выполнены N шагов. Тогда в узловых точках вычислены значения и построена общая аппроксимация .

**Определение 1.2.** Говорят, что метод (1.2) имеет дискретный порядок точности , если для любой решенной задачи его глобальная дискретная ошибка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

для достаточно малого , где

Говорят, что метод имеет равномерный порядок точности , если для любой решенной задачи его глобальная равномерная ошибка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

для достаточно малого .

1.1 Общие положения

Положим, что есть метод РК для ФДУЗТ. Для и мы вводим полиномиальные функции и , определяемые как

Далее расширим функции на отрицательный аргумент: , и введем сдвиг в виде То же самое сделаем для функций : положим , и определим

Как следует из [3], необходимыми условиями для равномерного (дискретного) порядка являются: .

В соответствии с этим предположим, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.5) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(1.6)* |

Выражение (1.5) является необходимым условием равномерного порядка, а условия (1.6) являются упрощающими.

Кроме того, для обеспечения свойства FSAL требуется, чтобы выполнялись следующие условия: .

1.2 Второй порядок

Напомним, что в (1.1) мы полагали относительно второго аргумента. Теперь дополнительно предположим, что u принадлежит почти везде классу .

Эти предположения позволяют легко доказать, что РК метод, удовлетворяющий (1.5), (1.6) имеет равномерный порядок 1, его дискретная глобальная ошибка и тогда

**Теорема 1.1.** Метод РК, удовлетворяющий (1.5), (1.6), имеет равномерный порядок 2 тогда и только тогда, когда  
и дискретный порядок 2 тогда и только тогда, когда

Доказательства этой и следующих ниже теорем представлены в работе Масета [3].

1.3 Третий порядок

Теперь выведем условия для непрерывного и дискретного порядка 3. Предположим, что принадлежит классу относительно второго аргумента и принадлежит классу почти везде.

**Теорема 1.2.** Метод РК, удовлетворяющий (1.5), (1.6) и имеющий второй равномерный порядок, имеет равномерный порядок 3   
и  
для

Заметим, что здесь и далее

**Теорема 1.3.** Метод РК, удовлетворяющий (1.5), (1.6) и имеющий дискретный порядок 2, имеет дискретный порядок 3 и  
для

1.4 Четвертый порядок

Теперь выведем условия для равномерного и дискретного порядка 4. Как и в случае третьего порядка, мы продолжаем полагать относительно второго аргумента, но теперь мы предполагаем, что почти везде.

**Теорема 1.4.** Метод РК, удовлетворяющий (1.5), (1.6) и имеющий равномерный порядок 3, имеет равномерный порядок 4    
для

**Теорема 1.5.** Метод РК, удовлетворяющий (1.5), (1.6) и имеющий дискретный порядок 3, имеет дискретный порядок 4    
для

Глава 2. Конструирование явных ФНРК методов с FSAL

В этой главе мы выведем функционально непрерывные методы третьего и четвертого порядка сходимости с FSAL.

Так как табличное представление методов РК для ОДУ является самым удобным для восприятия, мы распространим его на ФНРК, представив в виде

|  |  |
| --- | --- |
| *c* | *A(α )* |
|  | *b(α)* |

Например, непрерывные методы Эйлера и Хойна [3] будут иметь вид

|  |  |
| --- | --- |
| *0* | *0* |
|  | *α* |

и

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

соответственно.

2.1 Третий порядок

Из теорем 1.1, 1.2, а также условий (1.5), (1.6) мы получаем, что условиями третьего равномерного порядка являются  
Кроме того, для FSAL существует ограничение  
что является дискретным случаем (1.5).

Третье уравнение (1.15) эквивалентно Тогда первые два выражения позволяют нам выразить :

Из этих условий получаем дополнительно ограничение .

Исходя из того, что , последние условия (1.15) дают нам

Выбирая различные коэффициенты , можно получить различные методы 3 порядка. Например, взяв , получим следующий метод третьего порядка сходимости:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

2.2 Четвертый порядок

Теперь построим 7-этапный ФНРК метод 4 порядка сходимости в виде

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

где .

Разобьем условия четвертого порядка сходимости на три группы:



Первое условие из блока 2 дает , третье и четвертое условия в блоке 2 дают и пятое и шестое условия в блоке 2 вместе со вторым выражением в блоке 3 дают нам .

Для метода с выражения из первого блока выполняются только при и эквивалентны

Добавим к ним условие 4 дискретного порядка  
и положим . Разрешив данные 4 уравнения относительно получим соотношения

Для метода c и выражения из блока 2 принимают вид

а выражения блока 3 эквивалентны

Итого, условия для метода 4 порядка сходимости имеют вид

Взяв получим следующий метод:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *0* |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

где

Глава 3. Эксперименты

Мы провели тестирование порядка сходимости построенных методов сравнили результаты с полученными методами Масета. Также сравнили данные методы по затратности для обеспечения необходимой погрешности. Результаты представлены на графиках ниже. Синей линией обозначены результаты методов Масета, красной – результаты построенных нами методов.

Третий порядок:

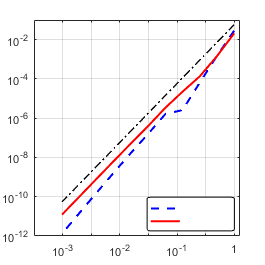


Рисунок . Проверка порядка сходимости. Тест 1.

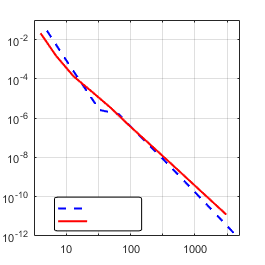


Рисунок . Соотношение затраты/погрешность. Тест 1.

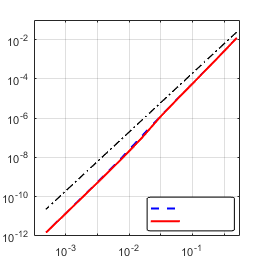


Рисунок . Порядок сходимости. Тест 2

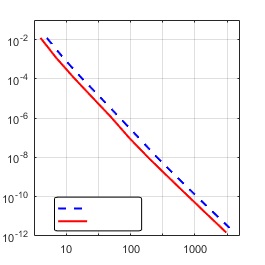


Рисунок . Соотношение затраты/погрешность. Тест 2

Четвертый порядок:

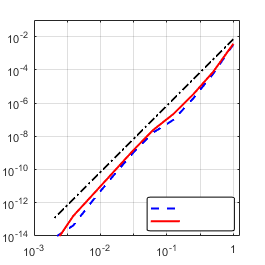


Рисунок . Проверка порядка сходимости. Тест 1

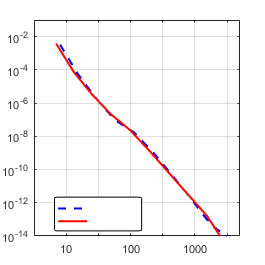


Рисунок . Соотношение затраты/погрешность. Тест 1

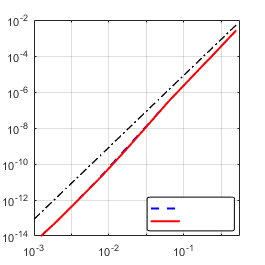


Рисунок . Проверка порядка сходимости. Тест 2

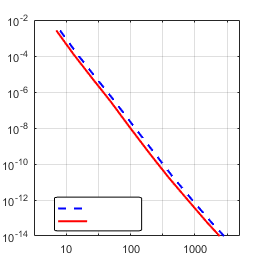


Рисунок . Соотношение затраты/погрешность. Тест 2

Выводы

На основе проведенных исследований можно сказать, что построенные нами методы превосходят соответствующие методы Масета по соотношению затрат к погрешностям вычислений и по сходимости.

Заключение

Мы вывели условия для обеспечения 2, 3 и 4 порядка для функционально-непрерывных методов с FSAL. На основе данных условий были построены методы 3 и 4 порядка сходимости. Эти методы были реализованы программно, их производительность была сопоставлена с результатами работы методов Масета [3] соответствующего порядка.

Список литературы

|  |  |
| --- | --- |
| [1] | A. Bellen и M. Zennaro, Numerical Methods for Delay Differential Equations, Oxford University Press, 2003. |
| [2] | L. Tavernini, «One-Step Methods for the Numerical Solution of Volterra Functional Differential Equations,» *SIAM Journal on Numerical Analysis,* т. 8, № 4, p. 786–795, 1971. |
| [3] | S. Maset, L. Torelli и R. Vermiglio, «Runge–Kutta methods for retarded functional differrential equations,» *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,* т. 15, pp. 1203-1251, 2005. |
| [4] | E. Hairer, S. Norsett и G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations. 1: Nonstiff Problems., Berlin, 1987. |
| [5] | B. Owren и M. Zennaro, «Derivation of efficient, continuous, explicit Runge-Kutta methods,» *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing,* т. 13, № 6, pp. 1488-1501, 1992. |