Отзыв научного руководителя
на выпускную квалификационную работу обучающегося СПБГУ Симонова Кирилла Алексеевича по теме "Алгоритмы матричного умножения"

Заявленная тема исследования имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение. Чем быстрее мы можем перемножать матрицы, тем быстрее работают многие алгоритмы линейной алгебры. Методы быстрого матричного умножения особенно важны при решении численных задач, требующих работы с матрицами большого размера.

Замечательное открытие Штрассена состояло в том, что для перемножения двух матриц размера 2×2 достаточно не 8 умножений матричных элементов, как требует наивный метод, а всего 7. Что в свою очередь означает, что матрицы размера $n \times n$ можно перемножить используя $O(n^{\log_2 7})$ операций умножения элементов. Для матриц большого размера выигрыш по сравнению со стандартным методом, требующим $O(n^3)$ операций умножения, оказывается существенным.

С момента появления статьи Штрассена появилось немало работ, в которых улучшается показатель в оценке вида $O(n^\kappa)$. Было предложено много подходов, в том числе, использующих идеи тензорной алгебры. Однако до настоящего времени остается открытым вопрос: можем ли мы перемножить две квадратные матрицы размера n, используя всего $O(n^{2+\epsilon})$ операций для сколь угодно малого ϵ?

В 2003–2005 годах Кон и Уманс с соавторами предложили новый подход к построению быстрых алгоритмов матричного умножения. Основная идея состоит в том, что вычисления в матричной алгебре заменяются на вычисления в некоторой специальной групповой алгебре. Упомянутые авторы показали, что существование быстрых алгоритмов следует из существования групп, размерности неприводимых представлений которых удовлетворяют специальным неравенствам. Они же привели и первые нетривиальные примеры таких конструкций. Кроме того, эти же авторы переформулировали этот подход в терминах существования некоторых специальных структур (так называемых 3-USP), описываемых в чисто комбинаторных терминах. Хотя данный подход пока не привел к рекордным алгоритмам, он представляется весьма многообещающим, так как помещает задачу в контекст теории конечных групп и их представлений.

Задача получения новой рекордной оценки слишком сложна, чтобы выдвигать ее в качестве темы выпускной работы. Поэтому перед К. А. Симоновым была поставлена задача уточнения оценок в конструкциях Кона и Уманса.

Наиболее интересным, на мой взгляд, является результат раздела 1.5, в котором автор дипломной работы вводит предложенное им новое понятие 2-USP и показывает, что данная конструкция тоже может быть применена для построения быстрых алгоритмов матричного умножения. В отличие от 3-USP, описание 2-USP оказывается проще, что позволяет надеяться на более простые явные конструкции. В этом же разделе автор приводит один из примеров явных конструкций 2-USP, с помощью которых можно описать алгоритм матричного умножения со сложностью $O(n^{2.48})$. Хотя сама оценка не является рекордной и была известна ранее, комбинаторная конструкция, лежащая в ее основе, получена лично автором и заслуживает внимания, а сам результат может быть опубликован.

Другая задача рассмотренная в дипломной работе, состоит в следующем. При получении оценок на сложность матричного умножения Кон, Уманс и соавторы обычно использовали не всю информацию о размерностях неприводимых представлений, что несколько огрубляло оценки. В разделе 2 дипломной работы автор провел более детальный анализ, вычислив все размерности неприводимых представлений рассматриваемых групп (обычно, это сплетения некоторой абелевой группы и симметрической). После этого были уточнены значения показателя κ для примеров Кона и Уманса. Вычисления, проведенные автором дипломной работы, показали, что оценки Кона и Уманса можно слегка усилить, но лишь в 6-7 значащей цифре, что все еще недостаточно для получения новых рекордов. При работе над этой частью исследования К. А. Симонов продемонстрировал прекрасное владение аппаратом теории представлений конечных групп.

Мое участие в руководстве темой сводилось, в основном, к введению в эту область и незначительным последующим консультациям. Основную часть исследования К. А. Симонов провел самостоятельно.

Считаю, что работа К. А. Симонова написана на высоком уровне, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и, несомненно, заслуживает оценки “**отлично**”.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
М. А. Всемирнов