О предельном поведении решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

С. Е. Купцова¹, С. Ю. Купцов², Н. А. Степенко¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² ООО «ОГС Россия», Российская Федерация,
197227, Санкт-Петербург, Гаккелевская ул., 21а

Для цитирования: Купцова С. Е., Купцов С. Ю., Степенко Н. А. О предельном поведении решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 173–182. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.210>

Работа посвящена исследованию предельного поведения решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Рассматривается случай, в котором все решения системы имеют одно предельное положение, которое, в свою очередь, может не являться инвариантным множеством рассматриваемой системы. Вводится понятие асимптотического положения покоя. На базе прямого метода Ляпунова, пользуясь методом функционалов Красовского, были получены достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах дифференциально-разностных уравнений. Также найдены новые достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения систем дифференциально-разностных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, асимптотическое положение покоя, функции Ляпунова, устойчивость по Ляпунову.

1. Введение. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом широко применяются для описания и моделирования различных динамических процессов, в которых необходимо учитывать зависимость скорости процесса не только от текущего, но и от прошлых состояний системы. Развитие теории устойчивости движений систем дифференциально-разностных уравнений, берущее начало в работах Н. Н. Красовского [1], Р. Беллмана и К. Л. Кука [2], Дж. Хейла [3] и В. И. Зубова [4, 5], по сей день остается актуальной темой исследований. В предложенной статье затрагивается вопрос появления в системах дифференциально-разностных уравнений асимптотических положений покоя. Понятие асимптотического положения покоя для систем дифференциальных уравнений было введено В. И. Зубовым [6], в связи с необходимостью изучения таких движений, которые имеют предельное поведение при неограниченном возрастании времени, причем сами предельные множества не являются инвариантными множествами исходных дифференциальных уравнений. Изучение таких движений для систем дифференциальных уравнений проводилось в [7–10], для систем разностных уравнений — в [11, 12]. В настоящей работе это понятие распространяется на системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

2. Основные обозначения и определения. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - h)), \quad (1)$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ — неизвестный n -мерный вектор; $h > 0$ — запаздывание; $f(t, x, y) = (f_1, \dots, f_n)^T$ — n -мерная вектор-функция, относительно которой предполагаем, что она определена и непрерывна на множестве $t \geq 0$, $x \in R^n$, $y \in R^n$ и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, т. е. для любого числа $H > 0$ найдется число $L = L(H) \geq 0$ такое, что для любых n -мерных векторов $x, \bar{x}, y, \bar{y}$, удовлетворяющих условию $\|x\| \leq H$, $\|\bar{x}\| \leq H$, $\|y\| \leq H$, $\|\bar{y}\| \leq H$, для любого $t \geq 0$ выполнено

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leq L(\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|).$$

Под $\|z\|$ здесь и далее понимается евклидова норма вектора.

Придерживаясь терминологии из [13], обозначим через $PC([a, b], R^n)$ бесконечномерное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ n -мерных вектор-функций с конечным числом точек разрыва первого рода, через $x(t, t_0, \varphi)$ — решение системы (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(t, t_0, \varphi) \equiv \varphi(t)$ при $t \in [t_0 - h, t_0]$, $\varphi \in PC([t_0 - h, t_0], R^n)$. Здесь и далее будем предполагать, что $t_0 \in R_+^1$, где $R_+^1 = \{t \in R^1 \mid t \geq 0\}$. Известно [3], что при выполнении условий, наложенных на правую часть системы, найдется $\beta > 0$ такое, что $x(t, t_0, \varphi)$ будет продолжимо, по крайней мере, на множество $[t_0 - h, t_0 + \beta]$, причем $x(t, t_0, \varphi)$ будет непрерывной функцией на отрезке $[t_0, t_0 + \beta]$.

Под состоянием системы в момент $t \geq t_0$ будем понимать сегмент решения $x(t, t_0, \varphi)$, принадлежащий отрезку $[t - h, t]$, т. е.

$$x_t(t_0, \varphi) : s \rightarrow x(t + s, t_0, \varphi), \quad s \in [-h, 0].$$

При этом начальное состояние системы определим следующим образом:

$$x_{t_0}(t_0, \varphi) : s \rightarrow \varphi(t_0 + s), \quad s \in [-h, 0].$$

Обозначим $X = PC([-h, 0], R^n)$ и пусть φ — произвольный элемент множества X . Введем норму φ таким образом:

$$\|\varphi(t)\|_h = \sup_{s \in [-h, 0]} \|\varphi(t + s)\|.$$

Определение 1. Положение $x = 0$ назовем асимптотическим положением покоя для траекторий системы (1), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|\varphi\|_h < \varepsilon$ решение $x(t, t_0, \varphi)$ системы (1) будет определено на множестве $t \geq t_0$, и

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Определение 2. Положение $x = 0$ назовем асимптотическим положением покоя в целом, если все решения системы (1) определены на множестве $t \geq t_0$ и обладают свойством (2).

Рассмотрим непрерывную и положительную на множестве $t \geq 0$ функцию $\lambda(t)$.

Определение 3. Функцию $W(t, x)$ назовем отрицательно определенной на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$, если

- 1) $W(t, x)$ непрерывна по всем своим аргументам на множестве $t \geq 0$, $x \in R^n$;
- 2) $W(t, x) \leq -W_1(x)$ на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$, где $W_1(x)$ — непрерывная и положительно определенная в R^n функция.

Пусть при каждом $t \in R_+^1$ на множестве X определен функционал $V(t, \varphi)$. Под функционалом будем понимать отображение $V : R_+^1 \times X \rightarrow R^1$.

Определение 4. Функционал $V(t, \varphi)$ будем называть непрерывным на множестве $R_+^1 \times X$, если для любых $\varepsilon > 0$, $t \in R_+^1$ и $\varphi \in X$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $\tau \in R_+^1$ и $\psi \in X$, удовлетворяющих соотношению $|t - \tau| + \|\varphi - \psi\|_h < \delta$, выполнено $|V(t, \varphi) - V(\tau, \psi)| < \varepsilon$.

После подстановки в функционал решения $x(t, t_0, \varphi)$ получим функцию времени $v(t) = V(t, x_t(t_0, \varphi))$.

Определение 5. Под производной функционала $V(t, x_t)$ вдоль решений системы (1) будем понимать функционал $W(t, x_t)$, обладающий для всех $\varphi \in PC([t_0 - h, t_0], R^n)$ следующим свойством:

$$\dot{v}(t) \equiv W(t, x_t(t_0, \varphi)),$$

причем тождество должно выполняться для всех тех $t \geq t_0$, для которых в этом равенстве определена правая часть, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода. Такой функционал $W(t, x_t)$, если он существует, будем обозначать $\dot{V}|_{(1)}(t, x_t)$. Сам же функционал $V(t, x_t)$ в этом случае будем называть дифференцируемым вдоль решений системы (1).

3. Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в целом. Предположим, что для каждого $H > 0$ функция $f(t, x, y)$ является равномерно ограниченной по отношению к $t \geq 0$ на множестве $\|x\| \leq H$, $\|y\| \leq H$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если для системы (1) существуют непрерывные на множестве $R_+^1 \times X$ функционалы $V(t, x_t)$ и $W(t, x_t)$ такие, что

1) $V_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x_t) \leq V_2(\|x_t\|_h)$, где функции $V_1(r)$ и $V_2(r)$ положительно определены на множестве $r \geq 0$ и $V_1(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$;

2) $\dot{V}|_{(1)}(t, x_t) = W(t, x_t) \leq W_1(t, x)$, где функция $W_1(t, x)$ отрицательно определена на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$;

3) для любого $t \geq 0$ найдется $x_* \in R^n$, для которого $W_1(t, x_*) = 0$ и существует число $M \geq 0$ такое, что
$$\int_0^{+\infty} \sup_{\|x\| < \lambda(\tau)} W_1(\tau, x) d\tau \leq M;$$

4) $\lambda(t) \in C^0([0, +\infty))$, $\lambda(t) > 0$ и $\lambda(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, тогда $x = 0$ является асимптотическим положением покоя в целом для траекторий системы (1).

З а м е ч а н и е 1. Из того что функция $W_1(t, x)$ отрицательно определена на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$, следует, что точка x_* , о которой идет речь в третьем условии теоремы, удовлетворяет условию $\|x_*\| < \lambda(t)$, а также то, что будут выполнены неравенства

$$\sup_{\|x\| < \lambda(t)} W_1(t, x) \geq 0 \quad \text{и} \quad W_1(t, x) \leq \sup_{\|x\| < \lambda(t)} W_1(t, x)$$

для всех $t \geq 0$ и $x \in R^n$.

З а м е ч а н и е 2. Если выполнено $W_1(t, 0) \equiv 0$, то x_* из третьего условия теоремы можно взять равным нулю для всех $t \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный момент $t_0 \geq 0$ и произвольную кусочно-непрерывную на $[t_0 - h, t_0]$ начальную функцию $\varphi(t)$. По условиям теоремы функционалы $V(t, x_t)$ и $W(t, x_t)$ заданы и непрерывны на множестве $R_+^1 \times X$, следовательно, для $v(t) = V(t, x_t(t_0, \varphi))$ равенство $\dot{v}(t) = w(t) = W(t, x_t(t_0, \varphi))$ будет

выполнено на всем интервале существования решения $t \in [t_0, T(t_0, \varphi))$, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода. Следовательно, для всех a, b из $[t_0, T(t_0, \varphi))$ выполнено

$$v(b) = v(a) + \int_a^b w(t) dt. \quad (3)$$

Ясно, что указанный $T(t_0, \varphi)$ может быть равен $+\infty$.

1. Покажем продолжимость решения $x(t, t_0, \varphi)$ на интервал $[t_0, +\infty)$. Пусть это не так, тогда найдется момент $t_* \geq t_0$ такой, что решение $x(t, t_0, \varphi)$ определено на множестве $t \in [t_0, t_*)$ и не определено при $t = t_*$. Тогда, с одной стороны, либо существуют некоторое число $H_0 > 0$ и последовательность $\tau_k \rightarrow t_* - 0$ такие, что $\|x(\tau_k, t_0, \varphi)\| \leq H_0$ для любого $k \geq 1$, что противоречит теореме существования и единственности решения основной начальной задачи [3], либо

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_* - 0,$$

что, исходя из первого условия теоремы, влечет за собой выполнение условия

$$v(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_* - 0. \quad (4)$$

С другой стороны, используя второе условие теоремы, имеем

$$W(t, x(t, t_0, \varphi)) \leq W_1(t, x(t, t_0, \varphi)).$$

Применяя соотношение (3), третье условие теоремы и принимая во внимание замечание 1, придем к противоречию с условием (4):

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t W_1(t, x(t, t_0, \varphi)) dt \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t \sup_{\|x\| < \lambda(\tau)} W_1(\tau, x) d\tau \leq v(t_0) + M. \quad (5)$$

2. Ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$ следует из полученной оценки (5) и первого условия теоремы. Таким образом, ограниченность каждого решения системы (1) установлена, т. е. существует постоянная $H_1 = H_1(t_0, \varphi) > 0$ такая, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq H_1$ для любого $t \geq t_0$.

3. Покажем, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Пусть это не так, тогда существуют постоянная величина $\alpha > 0$ и последовательность $t^k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ такие, что $\|x(t^k, t_0, \varphi)\| \geq \alpha$ для любого $k > 0$. Для решения $x(t, t_0, \varphi)$ возможны две ситуации:

(А) существует $T_1 \geq t_0 + h$ такой, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t)$ для любого $t \geq T_1$;

(В) существует последовательность интервалов (τ_k, τ^k) , $\tau_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ такая, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \lambda(t)$ для любого $t \in (\tau_k, \tau^k)$ и $\|x(t, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t)$ для любого $t \in [\tau^k, \tau_{k+1}]$.

Ситуация (А) содержит два случая:

(А1) существуют постоянная $\alpha_1 > 0$ и момент $T_2 \geq t_0 + h$ такие, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| \in [\alpha_1, H_1]$ для всех $t \geq T_2$;

(А2) существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ такая, что $\|x(t_k, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим случай (A1). Функция $\lambda(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, следовательно, найдется момент T_3 такой, что $\lambda(t) < \alpha_1$ при $t \geq T_3$. Обозначим $T = \max\{T_1, T_2, T_3\}$. Таким образом, при $t \geq T$ решение $x(t, t_0, \varphi)$ находится на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$, где функция $W_1(t, x)$ отрицательно определена. Тогда существует положительно определенная в R^n функция $\overline{W}(x)$ такая, что $W_1(t, x) \leq -\overline{W}(x)$ на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$. Положим

$$\gamma = \min_{\alpha_1 \leq \|x\| \leq H_1} \overline{W}(x), \quad \gamma > 0,$$

и воспользуемся равенством (3) в пределах от T до t и вторым условием теоремы:

$$v(t) - v(T) \leq \int_T^t W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq - \int_T^t \overline{W}(x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq -\gamma(t - T).$$

Это неравенство при $t > T + \frac{v(T)}{\gamma}$ будет противоречить неотрицательности $v(t)$.

В случае (A2) обязательно найдется последовательность отрезков $[\tau_k, \tau^k]$, $\tau_1 \geq T_1$, $\tau_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ такая, что $\|x(\tau_k, t_0, \varphi)\| = \frac{\alpha}{2}$, $\|x(\tau^k, t_0, \varphi)\| = \alpha$ и $\|x(t, t_0, \varphi)\| \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$ при $t \in [\tau_k, \tau^k]$. Положим

$$\beta = \min_{\frac{\alpha}{2} \leq \|x\| \leq \alpha} \overline{W}(x), \quad \beta > 0,$$

и воспользовавшись соотношением (3), получим неравенство

$$v(t) \leq v(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq v(\tau_1) - \beta \sum_{k=1}^{m(t)} (\tau^k - \tau_k), \quad (6)$$

где $m(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Положим $m_i = \sup |f_i(t, x, y)|$ на множестве $t \geq 0$, $\|x\| \leq H_1$, $\|y\| \leq H_1$, $M_1 = \sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2}$ и, пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях [14], оценим длины отрезков $[\tau_k, \tau^k]$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &\leq \|x(\tau^k, t_0, \varphi) - x(\tau_k, t_0, \varphi)\| = \sqrt{(x_1(\tau^k) - x_1(\tau_k))^2 + \dots + (x_n(\tau^k) - x_n(\tau_k))^2} = \\ &= (\tau^k - \tau_k) \sqrt{f_1^2(\xi_1, x(\xi_1), x(\xi_1 - h)) + \dots + f_n^2(\xi_n, x(\xi_n), x(\xi_n - h))} \leq \\ &\leq (\tau^k - \tau_k) \sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2} = M_1(\tau^k - \tau_k). \end{aligned}$$

Здесь $x_i(\tau)$ есть i -я координата вектор-функции $x(\tau, t_0, \varphi)$ и $\xi_i \in [\tau_k, \tau^k]$, $i = 1, \dots, n$. Отсюда оценим длины отрезков $[\tau_k, \tau^k]$:

$$\tau^k - \tau_k \geq \frac{\alpha}{2M_1} \quad \text{для любого } k \geq 1. \quad (7)$$

Следовательно, правая часть неравенства (6) стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, что противоречит неотрицательности функции $v(t)$. Таким образом, ситуация (A) невозможна.

В ситуации (B) существуют $t_* \geq t_0$ такое, что $\lambda(t) < \frac{\alpha}{2}$ для любого $t \geq t_*$, а также система отрезков $[\xi_m, \xi^m]$, $\xi_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$ такая, что $\|x(\xi_m, t_0, \varphi)\| = \frac{\alpha}{2}$, $\|x(\xi^m, t_0, \varphi)\| = \alpha$ и $\|x(t, t_0, \varphi)\| \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$ для любого $t \in [\xi_m, \xi^m]$. Не умаляя общности,

считая, что $\tau_1 > t_*$ и $\xi_1 > t_*$, представим отрезок $[\tau_1, t]$ в виде объединения множеств I_1 и I_2 , где

$$I_1 = \bigcup_{m=1}^{q(t)} [\xi_m, \xi^m] \quad \text{и} \quad I_2 = [\tau_1, t] \setminus I_1.$$

Принимая во внимание третье условие теоремы и замечание 1, оценим

$$\int_{I_2} W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq \int_{I_2} \sup_{\|x\| \leq \lambda(\tau)} W_1(\tau, x) d\tau \leq \int_{I_2 \cup I_1} \sup_{\|x\| \leq \lambda(\tau)} W_1(\tau, x) d\tau \leq M. \quad (8)$$

Теперь воспользуемся равенством (3), вторым условием теоремы и оценкой (8):

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq v(\tau_1) + \int_{I_1} W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau + \\ &+ \int_{I_2} W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq v(\tau_1) + M + \sum_{m=1}^{q(t)} \int_{\xi_m}^{\xi^m} W_1(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)) d\tau \leq \\ &\leq v(\tau_1) + M - \beta \sum_{m=1}^{q(t)} (\xi^m - \xi_m) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

в силу того, что $\xi^m - \xi_m \geq \alpha/2M_1$ и $q(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, в этой ситуации вновь получаем противоречие с условием неотрицательности функции $v(t)$. Теорема доказана.

4. Об асимптотической устойчивости. Рассмотрим систему (1) и предположим, что она имеет нулевое решение, а также откажемся от предположения равномерной ограниченности компонент вектор-функции $f(t, x, y)$ относительно $t \geq 0$ на множестве $\|x\| \leq H, \|y\| \leq H$.

Теорема 2. Если для системы (1) существуют непрерывные на множестве $R_+^1 \times X$ функционалы $V(t, x_t)$ и $W(t, x_t)$ такие, что

1) $V_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x_t) \leq V_2(\|x_t\|_h)$, где функции $V_1(r)$ и $V_2(r)$ положительно определены на множестве $0 \leq r \leq H$;

2) $\dot{V}|_{(1)}(t, x_t) = W(t, x_t) \leq W_1(t, x)$, где функция W_1 отрицательно определена на множестве $\lambda(t) \leq \|x\| \leq H$;

3) для любого $t \geq 0$ найдется $x_* \in R^n$, для которого $W_1(t, x_*) = 0$ и существует число $M \geq 0$ такое, что $\int_0^{+\infty} \sup_{\|x\| < \lambda(\tau)} W_1(\tau, x) d\tau \leq M$;

4) $\lambda(t) \in C^0([0, +\infty))$, $\lambda(t) > 0$ и $\lambda(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем, что нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову, т. е. для любого $\varepsilon > 0$, для любого $t_0 \geq 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей соотношению $\|\varphi\|_h < \delta$, выполнено $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и определим число

$$\eta = V_1(\varepsilon), \quad \eta > 0. \quad (9)$$

В силу положительной определенности функции $V_2(r)$, найдем число $\Delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$\max_{0 \leq r \leq \Delta} V_2(r) \leq \frac{\eta}{2}. \quad (10)$$

Пользуясь третьим условием теоремы и замечанием 1, определим момент $t_1 \geq 0$ так, чтобы

$$\int_t^{+\infty} \sup_{\|x\| < \lambda(\tau)} W_1(\tau, x) d\tau < \frac{\eta}{2} \quad \text{для всех } t \geq t_1. \quad (11)$$

Из четвертого условия теоремы следует, что существует момент $t_2 \geq 0$ такой, что $\lambda(t) < \Delta$ при $t \geq t_2$. Положим $T = \max\{t_0, t_1, t_2\}$ и, пользуясь теоремой об интегральной непрерывности [3], найдем $\delta \in (0, \varepsilon]$ такое, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \Delta$ при $\|\varphi\|_h < \delta$ для любого $t \in [t_0, T]$.

Рассмотрим произвольную начальную функцию $\bar{\varphi}(t)$, удовлетворяющую условию $\|\bar{\varphi}\|_h < \delta$, и покажем, что $\|\bar{x}(t)\| = \|x(t, t_0, \bar{\varphi})\| < \varepsilon$ для любого $t \geq t_0$. Пусть это не так, тогда найдется момент $T_2 \geq T$ такой, что $\|\bar{x}(T_2)\| = \varepsilon$. В этом случае для интегральной кривой $\bar{x}(t)$ возможны две ситуации:

(А) существует $T_1 \in [T, T_2)$ такой, что $\|\bar{x}(T_1)\| = \lambda(T_1)$ и $\|\bar{x}(t)\| \geq \lambda(t)$ для всех $t \in (T_1, T_2)$;

(В) найдется система интервалов $(\tau_k, \tau^k) \in [T, T_2)$, $k = 1, \dots, m$, такая, что $\|\bar{x}(t)\| < \lambda(t)$ при $t \in (\tau_k, \tau^k)$ и $\|\bar{x}(t)\| \geq \lambda(t)$ при $t \in [\tau^k, \tau^{k+1}]$.

В ситуации (А), используя второе условие теоремы и соотношения (3), (9), (10), придем к следующему противоречию:

$$\eta \leq v(T_2) < v(T_1) < \eta.$$

В ситуации (В), воспользовавшись третьим условием теоремы, замечанием 1, а также соотношениями (3) и (11), получим

$$v(T_2) \leq v(T) + \int_T^{T_2} W_1(t, \bar{x}(t)) dt \leq v(T) + \int_T^{T_2} \sup_{\|x\| < \lambda(t)} W_1(t, x) dt < v(T) + \frac{\eta}{2}.$$

Следовательно, применяя (9) и (10), придем к такому противоречию:

$$\eta \leq v(T_2) < v(T) + \frac{\eta}{2} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Таким образом, устойчивость по Ляпунову нулевого решения показана. Доказательство асимптотической устойчивости будет полностью повторять третий пункт доказательства теоремы 1 с той лишь разницей, что оценку (7) получаем из условий липшицевости правой части системы (1) и наличия у нее нулевого решения. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что применение приведенных теорем может быть полезно в случае исследования поведения решений систем с возмущениями

$$\dot{x} = F(t, x(t), x(t-h)) + R(t, x_t),$$

если относительно системы $\dot{x} = F(t, x(t), x(t-h))$ известно, что она имеет асимптотически устойчивое в целом нулевое решение и вектор возмущений таков, что

$$\|R(t, x_t)\| \leq \bar{R}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Пример. Приведем иллюстративный пример использования теоремы 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -2x^3(t) + x^3(t-h) + e^{-t} \quad (12)$$

и функционал $V = x^4(t) + \int_{t-h}^t x^6(s) ds$. Нетрудно убедиться в том, что функционал является непрерывным в смысле определения 4 и удовлетворяет первому условию теоремы 1, где $V_1(\|x\|) = \|x\|^4$, а $V_2(\|x\|_h) = \|x\|_h^4 + h\|x\|_h^6$. Рассмотрим функционал $W(t, x_t) = -7x^6(t) + 4x^3(t)x^3(t-h) + 4x^3(t)e^{-t} - x^6(t-h)$. Он также является непрерывным в смысле определения 4. На произвольном решении $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ уравнения (12) функция $\dot{v}(t)$, которую можно найти, пользуясь основными правилами дифференцирования, совпадает с $W(t, x_t(t_0, \varphi))$, за исключением, быть может, конечного набора точек, которые порождаются точками разрыва первого рода начальной функции φ . Тогда, исходя из определения 5, действительно выполнено

$$\dot{V}|_{(12)}(t, x_t) = W(t, x_t).$$

При этом будем иметь

$$\begin{aligned} W(t, x_t) &= -7x^6(t) + 4x^3(t)x^3(t-h) + 4x^3(t)e^{-t} - x^6(t-h) = \\ &= -3x^6(t) - (2x^3(t) - x^3(t-h))^2 + 4x^3(t)e^{-t} \leq \\ &\leq -3x^6(t) + 4|x(t)|^3e^{-t} = W_1(t, x(t)). \end{aligned}$$

В качестве функций $W_1(t, x)$ и $\lambda(t)$ из условий теоремы 1 возьмем

$$W_1(t, x) = -3x^6 + 4|x|^3e^{-t} \quad \text{и} \quad \lambda(t) = 2e^{-\frac{t}{3}},$$

тогда будут справедливы оценки

$$W_1(t, x) \leq -\frac{5}{2}x^6 \quad \text{на множестве} \quad |x| \geq 2e^{-\frac{t}{3}},$$

т. е. функция $W_1(t, x)$ отрицательно определена на множестве $|x| \geq \lambda(t)$, и

$$\int_0^{+\infty} \sup_{|x| < 2e^{-\frac{\tau}{3}}} W_1(\tau, x) d\tau \leq 32 \int_0^{+\infty} e^{-2\tau} d\tau = 16,$$

т. е. выполнено третье условие теоремы 1. С учетом замечания 2 выполнены все условия теоремы 1, и значит, положение $x = 0$ является для уравнения (12) асимптотическим положением покоя в целом.

5. Заключение. В данной работе исследовалось предельное поведение решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. На базе второго метода Ляпунова были получены достаточные условия, при выполнении которых исходная система имеет асимптотическое положение покоя. В случае наличия у исходной системы нулевого решения были получены достаточные условия его асимптотической устойчивости.

Литература

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 211 с.

2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / пер. с англ. А. М. Зверкина, Г. А. Каменского; под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Мир, 1967. 548 с. (*Bellman R., Cooke K. L. Differential-difference equations.*)
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / пер. с англ. С. Н. Шиманова; под ред. А. Д. Мышкиса. М.: Мир, 1984. 421 с. (*Hale J. Theory of functional differential equations.*)
4. Zubov B. I. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
5. Zubov B. I. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 86–95.
6. Zubov B. I. Колебания и волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. 416 с.
7. Купцова С. Е. Асимптотически инвариантные множества // Процессы управления и устойчивость: Труды 37-й междунар. науч. конференции аспирантов и студентов / под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2006. С. 50–56.
8. Zubov C. B. О расчетной устойчивости одного класса нелинейных систем // Процессы управления и устойчивость: Труды 37-й междунар. науч. конференции аспирантов и студентов / под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2006. С. 29–33.
9. Тихомиров О. Г., Темжина Е. В. Асимптотическое положение покоя для систем однородных нестационарных дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 2. С. 58–65.
10. Ekimov A. V., Svirkin M. V. Analysis of asymptotic equilibrium state of differential systems using Lyapunov function method // 2015 Intern. conference “Stability and control processes” in memory of V. I. Zubov (SCP). Saint Petersburg: IEEE, 2015. P. 45–47.
11. Купцова С. Е. Асимптотические положения покоя в системах разностных уравнений // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 2 (56). С. 67–71.
12. Kuptsov S. Yu., Kuptsova S. E., Zaranik U. P. On asymptotic quiescent position of nonlinear difference systems with perturbations // 2015 Intern. conference “Stability and control processes” in memory of V. I. Zubov (SCP). Saint Petersburg: IEEE, 2015. P. 20–22.
13. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.
14. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: в 3 т. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1988. Т. 1. 712 с.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 2 ноября 2017 г.; принята к печати 15 марта 2018 г.

Контактная информация:

Купцова Светлана Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент; sekuptsova@yandex.ru

Купцов Сергей Юрьевич — канд. физ.-мат. наук; srgkuptsov@yandex.ru

Степенко Николай Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; nick_st@mail.ru

On the limiting behavior of a time-delay system's solutions

S. E. Kuptsova¹, S. Yu. Kuptsov², N. A. Stepenko¹

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² ООО “OGS Russia”, 21a, Gakkelevskaya str., St. Petersburg, 197227, Russian Federation

For citation: Kuptsova S. E., Kuptsov S. Yu., Stepenko N. A. On the limiting behavior of a time-delay system's solutions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 173–182. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.210>

In the present paper, we study motions of time-delay systems that have limiting behavior for an unbounded increase in time in the case when the limit sets might not be invariant with respect to initial differential-difference equations. The concept of an asymptotic quiescent position for the trajectories of time-delay systems is introduced. By the use of the Lyapunov functionals method, sufficient conditions for the existence of an asymptotic quiescent position for systems of differential-difference equations were obtained. In the case when a general

system has a trivial solution, new sufficient conditions for its asymptotic stability are obtained. Namely, the condition of the negativity of the time-derivative of Krasovskii functionals is weakened.

Keywords: Time-delay systems, asymptotic stability, asymptotic quiescent position, Lyapunov functions.

References

1. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motions]. Moscow, State Publ. of Phys. and Math. Literature, 1959, 211 p. (In Russian)
2. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations*. New York, Academic Press, 1963, 482 p. (Russ. ed.: Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya*. Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p.)
3. Hale J. *Theory of functional differential equations*. New York, Springer Press, 1977, 365 p. (Russ. ed.: Hale J. *Teoria funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*. Moscow, Mir Publ., 1984, 421 p.)
4. Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on theory of control]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 496 p.
5. Zubov V. I. K teorii lineinykh statsionarnykh sistem s zapazdyvayushchim argumentom [To the theory of linear time-delay systems]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Proc. of Higher Educational Institutions. Mathematics], 1958, no. 6, pp. 86–95. (In Russian)
6. Zubov V. I. *Kolebaniya i volny* [Oscillations and waves]. Leningrad, Leningr. State University Publ., 1989, 416 p. (In Russian)
7. Kuptsova S. E. Asimptoticheski invariantnye mnojestva [An asymptotically invariant sets]. *Control Processes and Stability (CPS)*. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2006, pp. 50–56. (In Russian)
8. Zubov S. V. O raschetnoi ustoychivosti odnogo klassa nelineynykh sistem [On the rated stability of a class of nonlinear systems]. *Control Processes and Stability (CPS)*. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2006, pp. 29–33. (In Russian)
9. Tikhomirov O. G., Temkina E. V. Asimptoticheskoe polozhenie pokoia dlia sistem odnorodnykh nestatsyonarnykh differentsialnykh uravnenii [Asymptotic quiescent position for systems of homogeneous non-autonomous differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, iss. 2, pp. 58–65. (In Russian)
10. Ekimov A. V., Svirkin M. V. Analysis of asymptotic equilibrium state of differential systems using Lyapunov function method. *2015 Intern. conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov (SCP)*. Saint Petersburg, IEEE, 2015, pp. 45–47.
11. Kuptsova S. E. Asimptoticheskie polozheniya pokoia v sistemah raznostnykh uravnenii [The asymptotic rest positions in the systems of difference equations]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technology], 2014, vol. 56, no. 2, pp. 67–71. (In Russian)
12. Kuptsov S. Yu., Kuptsova S. E., Zaranik U. P. On asymptotic quiescent position of nonlinear difference systems with perturbations. *2015 Intern. conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov (SCP)*. Saint Petersburg, IEEE, 2015, pp. 20–22.
13. Kharitonov V. L. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Basel, Birkhäuser Press, 2013, 311 p.
14. Kudryavtsev L. D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course in mathematical analysis]. In 3 vol. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988, vol. 1, 712 p. (in Russian)

Author's Information:

Kuptsova Svetlana E. — PhD Sci. in physics and mathematics, associate professor;
sekuptsova@yandex.ru

Kuptsov Sergey Yu. — PhD Sci. in physics and mathematics; srgkuptsov@yandex.ru

Stepenko Nikolai A. — PhD Sci. in physics and mathematics, associate professor; nick_st@mail.ru