Квадратичные и кубичные полиномы Вольтерра: идентификация и приложение*

С. В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН,
Российская Федерация, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130

Для цитирования: Солодуша С. В. Квадратичные и кубичные полиномы Вольтерра: идентификация и приложение // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 131–144. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.205>

Центральная проблема при построении математической модели нелинейной динамической системы типа вход–выход в виде полинома Вольтерра N -го порядка заключается в идентификации ядер Вольтерра. В настоящее время предложены различные алгоритмы решения данной задачи. Как правило, при этом предполагается, что предварительно выполнена декомпозиция отклика динамической системы $y(t)$ на составляющие, обусловленные влиянием отдельных интегральных слагаемых. Проблема разделения, вообще говоря, инвариантна относительно конкретного семейства тестовых воздействий, а выбор амплитуд тестовых сигналов, используемых для идентификации ядер Вольтерра, связан с необходимыми условиями разрешимости соответствующих многомерных интегральных уравнений в специальных классах функций. В статье представлены теоремы существования решений двумерного и трехмерного интегральных уравнений Вольтерра I рода. Данный результат получен в терминах амплитуд тестовых сигналов, что позволит в дальнейшем снять произвол в выборе амплитуд при построении квадратичного и кубичного полиномов Вольтерра в случае, когда внешнее воздействие $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ есть вектор-функция времени. Приведены иллюстративные расчеты на примере эталонных динамических систем.

Ключевые слова: идентификация, ядра Вольтерра, интегральные уравнения, математическое моделирование.

Введение. Конечный отрезок (полином) интегростепенного ряда Вольтерра

$$y(t) = \sum_{m=1}^N f_m(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где

$$f_m(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{m \text{ раз}} K_m(s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(t - s_i) ds_i, \quad (2)$$

используется для математического моделирования нелинейных динамических систем во многих областях естествознания. В настоящее время предложено много методов идентификации ядер Вольтерра в (2) во временной области. Назовем некоторые из

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-01425а) и Программы фундаментальных исследований Сибирского отделения РАН (проект № АААА-А17-117030310446-6).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

них, основанные на применении функции Хевисайда $e(t)$. В работе [1] рассмотрен подход, связанный с аппроксимацией на $[0, T]$ периодического тестового сигнала дискретно заданным сигналом ступенчатого вида с постоянным шагом квантования. При этом предполагается, что исходный непрерывный входной сигнал имеет постоянный период T . Дальнейшее развитие данная методика получила в работах [2, 3], в которых в качестве тестовых сигналов для идентификации K_m , $m \geq 2$, используется

$$x_{\omega_1, \dots, \omega_m}(t) = \sum_{j=1}^m C_{\omega_j} \alpha e(t - \omega_j), \quad \omega_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m \omega_j \leq t \leq T.$$

Здесь α — амплитуда (высота) сигнала, C_{ω_j} — логическая переменная, равная нулю, если $\omega_j = 0$. В [4] выполнена модификация для динамической системы с двумя входами, где процесс идентификации включает эвристический алгоритм разделения отклика системы $y(t)$ на составляющие, обусловленные влиянием отдельного интегрального слагаемого квадратичной модели Вольтерра. Проблема разделения, вообще говоря, инвариантна относительно конкретного семейства тестовых воздействий, и, как показано в [5, с. 293–299], выбор амплитуд тестовых сигналов при восстановлении ядер Вольтерра K_m , $m \geq 2$, связан с необходимыми условиями разрешимости соответствующих многомерных интегральных уравнений в специальных классах функций.

Таким образом, несмотря на многообразие существующих способов определения динамических характеристик, по-прежнему актуальны разработка новых и совершенствование существующих подходов идентификации полиномов Вольтерра.

Об одном способе идентификации ядер Вольтерра. Остановимся подробнее на методике, основанной на задании тестовых входных сигналов

$$x_{\omega_1, \dots, \omega_{m-1}}^\alpha(t) = \alpha \left[e(t) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} (-1)^k e\left(t - \sum_{i=1}^k \omega_i\right) + (-1)^{m-1} e\left(t - \sum_{i=1}^{m-1} \omega_i\right) \right], \quad (3)$$

$\omega_{m-1} \in \Delta_m = \{t, \omega_1, \dots, \omega_{m-1} : 0 \leq \sum_{k=1}^{m-1} \omega_k \leq t \leq T; \omega_k \geq 0\}$, $m \geq 2$, которая была предложена в [6] и развита в [5, 7] на случай векторного воздействия $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq p} f_{i_1, \dots, i_m}(t), \quad (4)$$

$$f_{i_1, \dots, i_m}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1, \dots, i_m}(s_1, \dots, s_m) \prod_{j=1}^m x_{i_j}(t - s_j) ds_j. \quad (5)$$

Полагая, что задача разделения $y(t)$ на составляющие $f_{i_1, \dots, i_m}(t)$ тем или иным образом решена, задачу восстановления $K_{i_1, \dots, i_m}$ (симметричных по переменным $s_1, \dots, s_m$, соответствующим совпадающим индексам $i_1, \dots, i_m$) возможно свести к решению линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода. В частности, идентификация симметричных ядер Вольтерра из (2) состоит в решении линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода

$$\sum_{i_1 + \dots + i_{m-1} = m} (-1)^{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} i_{2k}} \frac{m!}{i_1! \dots i_{m-1}!} V_{i_1, \dots, i_{m-1}} K_m(s_1, \dots, s_m) ds_1 \dots ds_m = f_m, \quad (6)$$

$m \geq 2$, имеющих явные формулы обращения [5]. Методы идентификации несимметричных и частично-симметричных ядер Вольтерра из (5) и их численные аппроксимации в случае двумерных и трехмерных входных сигналов приведены в [5, 7]. В [8] показано применение интегральной модели Вольтерра (4), где $N = 2$, $p = 2$, $x_1(t) \equiv \Delta D(t)$, $x_2(t) \equiv \Delta Q(t)$, для описания процессов теплообмена. Идентификация ядер Вольтерра выполнялась на основе данных физического эксперимента, проведенного на высокотемпературном контуре (ВТК) ИСЭМ СО РАН, а также с помощью эталонной модели [9]

$$\Delta i_{et}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t \left(\Delta Q(\eta) - \frac{Q_0}{D_0} \Delta D(\eta) \right) \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \int_{\eta}^t D(s) ds} & -e^{-\lambda_2 \int_{\eta}^t D(s) ds} \end{pmatrix} d\eta, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

в которой t — время, λ_1 и λ_2 — некоторые константы, индексами «0» обозначены параметры начального стационарного режима, $D_0 = 0.16$ кг/с, $Q_0 = 100$ кВт, Δ — приращение, например, $D(t) = D_0 + \Delta D(t)$. Числовые характеристики, входящие в (7), принимались соответствующими реальной установке ВТК. Для идентификации ядер Вольтерра K_1 , K_{11} (K_2 , K_{22}) использовались входные возмущения $x_{1\omega_1}^{\alpha_{i,1}}(t)$ из (3) при $m = 2$ и $x_2(t) = 0$ ($x_1(t) = 0$ и $x_{2\omega_1}^{\alpha_{i,2}}(t)$) с амплитудами $\alpha_{i,1} = c_{i,1} D_0$, $\alpha_{i,2} = c_{i,2} Q_0$, $c_{i,k} \neq 0$, $i, k = 1, 2$, которые выбирались эмпирическим путем, исходя из условия

$$\alpha_{1,i} + \alpha_{2,i} = 0. \quad (8)$$

В [10] выполнено построение кубичного полинома Вольтерра (1) (при $N = 3$) для исследования динамики энтальпии $\Delta i(t)$. При идентификации ядер Вольтерра K_1 , K_{11} , K_{111} использовались отклики эталонной модели (7) ($\Delta Q(t) = 0$) на тестовые сигналы $x_{1\omega_1, \omega_2}^{\hat{\alpha}_{i,1}}(t)$ из (3) при $m = 3$, где $\hat{\alpha}_{1,1} = -\hat{\alpha}_{2,1}$, $\hat{\alpha}_{3,1} = C \hat{\alpha}_{j,1}$, $j = 1, 2$, $i = \overline{1,3}$, C — некоторая константа. Сравнение погрешностей моделирования эталонного отклика $\Delta i_{et}(t)$ при произвольных входных воздействиях $\Delta D(t)$ в [10] показало, что в некоторых случаях прогностические свойства кубичной модели были хуже, чем квадратичной. В связи с этим дальнейшее развитие данной тематики было направлено на повышение точности моделирования за счет, во-первых, выбора амплитуд тестовых сигналов, а во-вторых, более эффективного учета откликов, полученных на этапе тестирования динамической системы.

По первому направлению было получено, что некоторые ограничения на значения амплитуд тестовых сигналов, используемых для построения интегральных моделей, вытекают из принадлежности ядер Вольтерра к определенным классам функций [5]. В частности, в [5, с. 297] показано, что из условий разрешимости (6) двумерного ($m = 2$) интегрального уравнения Вольтерра I рода в классе непрерывных на квадрате $\Omega_2 = \{s_1, s_2 : 0 \leq s_1, s_2 \leq T\}$ симметричных функций вытекает равенство вида (8). Аналогичное условие

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 = 0, \quad (9)$$

обеспечивающее существование решения (6) при $m = 3$ в классе непрерывных на $\Omega_3 = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq T\}$ симметричных функций, приведено в статье [11]. Второе направление связано с построением комбинированных интегральных моделей Вольтерра, в которых $K_m(t, s_1)$ трактуются как явные функции времени. Эффект от замены стационарного линейного слагаемого в (1) нестационарным продемонстрирован в [5, с. 296–298] на математическом примере.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [5, 11]. Ее теоретическая часть связана с первым из указанных направлений и посвящена необходимым условиям существования несимметричных ядер Вольтерра, входящих в (4), (5) при $p = 2$, $N = 2, 3$, практическая — со вторым направлением и посвящена изучению эффективности применения интегральных моделей с нестационарными составляющими при описании нелинейной динамики тестовых систем.

Идентификация несимметричных ядер в квадратичном полиноме Вольтерра. Обратимся к проблеме выбора амплитуд тестовых сигналов при построении полиномов Вольтерра (4) при $N = 2$. Предположим, что ядра K_i , K_{ii} , отражающие чувствительность системы к изменению только одного из входных сигналов $x_i(t)$ при $i = 1, 2$, восстановлены. При этом полагаем, что амплитуды тестовых сигналов выбирались с учетом условия (8). Следуя [7], рассмотрим идентификацию на квадрате Ω_2 несимметричной функции $K_{12}(s_1, s_2)$ с помощью двух серий тестовых сигналов

$$\begin{cases} x_1^{\beta_1}(t) = \beta_1 e(t), \\ x_{2\omega_1}^{\beta_2}(t) = \beta_2(e(t) - e(t - \omega_1)), \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1\omega_1}^{\beta_1}(t) = \beta_1(e(t) - e(t - \omega_1)), \\ x_2^{\beta_2}(t) = \beta_2 e(t), \end{cases} \quad t, \omega_1 \in \Delta_2, \quad (10)$$

Подстановка (10) в (4) при $N = 2$ приводит к парному двумерному интегральному уравнению Вольтерра I рода

$$\begin{aligned} \int_0^t ds_1 \int_{t-\omega_1}^t K_{12}(s_1, s_2) ds_2 &= f_{12}^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1), \quad t, \omega_1 \in \Delta_2, \\ \int_{t-\omega_1}^t ds_1 \int_0^t K_{12}(s_1, s_2) ds_2 &= f_{12}^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1), \quad t, \omega_1 \in \Delta_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} f_{12}^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1) &= \frac{y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)}{\beta_1 \beta_2} - \frac{1}{\beta_2} \int_0^t K_1(s) ds - \frac{\beta_1}{\beta_2} \int_0^t \int_0^t K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\beta_1} \int_{t-\omega_1}^t K_2(s) ds - \frac{\beta_2}{\beta_1} \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{22}(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \\ f_{12}^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1) &= \frac{y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)}{\beta_1 \beta_2} - \frac{1}{\beta_2} \int_{t-\omega_1}^t K_1(s) ds - \frac{\beta_1}{\beta_2} \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\beta_1} \int_0^t K_2(s) ds - \frac{\beta_2}{\beta_1} \int_0^t \int_0^t K_{22}(s_1, s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Здесь $y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)$ и $y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)$ являются откликами на соответствующую серию тестовых воздействий (10).

Теорема 1. *Условия*

$$\left(\frac{\partial^2 y_1^{(i)\beta_1, \beta_2}}{\partial t \partial \omega_1}(t, \omega_1) + \frac{\partial^2 y_1^{(i)\beta_1, \beta_2}}{\partial \omega_1^2}(t, \omega_1) \right) \in C_{\Delta_2}, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

$$y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, 0) = \frac{\beta_1(\alpha_{2,1} - \beta_1)}{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} y^{\alpha_{1,1}, 0}(t, t) + \frac{\beta_1(\beta_1 - \alpha_{1,1})}{\alpha_{2,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} y^{\alpha_{2,1}, 0}(t, t), \quad (13)$$

$$y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, 0) = \frac{\beta_2(\alpha_{2,2} - \beta_2)}{\alpha_{1,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} y^{0, \alpha_{1,2}}(t, t) + \frac{\beta_2(\beta_2 - \alpha_{1,2})}{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} y^{0, \alpha_{2,2}}(t, t), \quad (14)$$

$$y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, t) = y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1) + y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1) \right] = \frac{1}{2} \left[y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t - \omega_1, -\omega_1) + \right. \\ & \left. + y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t - \omega_1, -\omega_1) \right] + y_1^{(i)\beta_1, \beta_2}(t, t) - y_1^{(i)\beta_1, \beta_2}(t - \omega_1, t - \omega_1) + \\ & + \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\alpha_{2,1} y^{\alpha_{1,1}, 0}(t, \omega_1)}{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} - \frac{\alpha_{1,1} y^{\alpha_{2,1}, 0}(t, \omega_1)}{\alpha_{2,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} \right) + \\ & + \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\alpha_{2,2} y^{0, \alpha_{1,2}}(t, \omega_1)}{\alpha_{1,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} - \frac{\alpha_{1,2} y^{0, \alpha_{2,2}}(t, \omega_1)}{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} \right) + \\ & + \frac{\beta_1^2}{2} \left[\frac{y^{\alpha_{2,1}, 0}(t - \omega_1, t - \omega_1) - y^{\alpha_{2,1}, 0}(t, t)}{\alpha_{2,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} - \frac{y^{\alpha_{1,1}, 0}(t - \omega_1, t - \omega_1) - y^{\alpha_{1,1}, 0}(t, t)}{\alpha_{2,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} \right] + \\ & + \frac{\beta_2^2}{2} \left[\frac{y^{0, \alpha_{2,2}}(t - \omega_1, t - \omega_1) + y^{0, \alpha_{2,2}}(t, t)}{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} - \frac{y^{0, \alpha_{1,2}}(t - \omega_1, t - \omega_1) + y^{0, \alpha_{1,2}}(t, t)}{\alpha_{1,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} \right], \\ & \left(\frac{\partial^2 y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}}{\partial t \partial \omega_1}(t, \omega_1) + \frac{\partial^2 y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}}{\partial \omega_1^2}(t, \omega_1) \right)_{\omega_1=0} + \\ & + \frac{\beta_2^2 \alpha_{1,2}}{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} \left(\frac{\partial^2 y^{0, \alpha_{2,2}}(t, \omega_1)}{\partial t \partial \omega_1} + \frac{\partial^2 y^{0, \alpha_{2,2}}(t, \omega_1)}{\partial \omega_1^2} \right)_{\omega_1=0} - \\ & - \frac{\beta_2^2 \alpha_{2,2}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2})} \left(\frac{\partial^2 y^{0, \alpha_{1,2}}(t, \omega_1)}{\partial t \partial \omega_1} + \frac{\partial^2 y^{0, \alpha_{1,2}}(t, \omega_1)}{\partial \omega_1^2} \right)_{\omega_1=0} = \\ & = \left(\frac{\partial^2 y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}}{\partial t \partial \omega_1}(t, \omega_1) + \frac{\partial^2 y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}}{\partial \omega_1^2}(t, \omega_1) \right)_{\omega_1=0} + \\ & + \frac{\beta_1^2}{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} \left(\frac{\partial^2 y^{\alpha_{1,1}, 0}(t, \omega_1)}{\partial t \partial \omega_1} + \frac{\partial^2 y^{\alpha_{1,1}, 0}(t, \omega_1)}{\partial \omega_1^2} \right)_{\omega_1=0} - \\ & - \frac{\beta_1^2}{\alpha_{2,1}(\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1})} \left(\frac{\partial^2 y^{\alpha_{2,1}, 0}(t, \omega_1)}{\partial t \partial \omega_1} + \frac{\partial^2 y^{\alpha_{2,1}, 0}(t, \omega_1)}{\partial \omega_1^2} \right)_{\omega_1=0} \end{aligned} \quad (17)$$

необходимы и достаточны для существования решения

$$K_{12}(t, t - \omega_1) = \left(\frac{\partial^2 f_{12}^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)}{\partial t \partial \omega_1} + \frac{\partial^2 f_{12}^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)}{\partial \omega_1^2} \right), \quad t, \omega_1 \in \Delta_2,$$

$$K_{12}(t - \omega_1, t) = \left(\frac{\partial^2 f_{12}^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)}{\partial t \partial \omega_1} + \frac{\partial^2 f_{12}^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1)}{\partial \omega_1^2} \right), \quad t, \omega_1 \in \Delta_2,$$

парного уравнения (11) в пространстве C_{Ω_2} непрерывных на квадрате Ω_2 функций.

Доказательство проводится стандартным образом, аналогично [12].

В (13), (14), (16), (17) $y^{\alpha_{i,1},0}$ и $y^{0,\alpha_{i,2}}$ есть отклики динамической системы на $x_{i\omega_1}^{\alpha_{i,j}}(t)$, $j = 1, 2$, из (3) при $m = 2$ соответственно.

Идентификация частично симметричных ядер в кубичном полиноме

Вольтерра. Рассмотрим стратегии выбора амплитуд тестовых сигналов для идентификации частично симметричных ядер Вольтерра $K_{i_1 i_2 i_3}$ из (4) при $N = 3$, где для определенности $i_1 = i_2 = 1$, $i_3 = 2$. Дополнительно к сделанным ранее предположениям считаем, что задача идентификации ядер Вольтерра K_{iii} ($i = 1, 2$) и K_{12} решена. При этом полагаем, что для восстановления K_{12} использовались отклики динамической системы $y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}$, $y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}$ на тестовые воздействия (10), а для восстановления K_i , K_{iii} — отклики динамической системы $y_{\hat{\alpha}_{j,1},0}^{\hat{\alpha}_{j,1},0}$, $y_{\hat{\alpha}_{j,2},0}^{0,\hat{\alpha}_{j,2}}$, $j = \overline{1,3}$, на тестовые воздействия (3) при $m = 3$ с амплитудами $\hat{\alpha}_{1,i}$, $\hat{\alpha}_{2,i}$, $\hat{\alpha}_{3,i}$, удовлетворяющими условию (9) при фиксированном значении i .

Область определения Ω_3 функции K_{112} состоит из трех подобластей:

$$\Omega_3^{(1)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_3 \leq s_1, s_2 \leq T\},$$

$$\Omega_3^{(2)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_1, s_2 \leq s_3 \leq T\},$$

$$\Omega_3^{(3)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_1 \leq s_3 \leq s_2 \leq T \cup 0 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_1 \leq T\}.$$

Следуя [5, с. 268], введем для идентификации K_{112} следующие наборы тестовых сигналов:

$$\begin{cases} x_{1\omega_1}^{\gamma_{i,1}}(t) = \gamma_{i,1}(e(t) - e(t - \omega_1)), \\ x_{2\omega_1, \omega_2}^{\gamma_{i,2}}(t) = \gamma_{i,2}(e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2)), \end{cases} \quad t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3, \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_{1\omega_1, \omega_2}^{\gamma_{i,1}}(t) = \gamma_{i,1}(e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2)), \\ x_{2\omega_1}^{\gamma_{i,2}}(t) = \gamma_{i,2}(e(t) - e(t - \omega_1)), \end{cases} \quad t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3, \quad (19)$$

$$\begin{cases} x_{1\omega_1, \omega_2}^{\gamma_{i,1}}(t) = \gamma_{i,1}(e(t) - e(t - \omega_1 - \omega_2)), \\ x_{2\omega_1}^{\gamma_{i,2}}(t) = \gamma_{i,2}e(t - \omega_1), \end{cases} \quad t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3. \quad (20)$$

Учитывая (8), выберем $\gamma_i = \gamma_{1,i} = -\gamma_{2,i}$. Подстановка (18)–(20) в (4) при $N = 3$ приводит к трехмерному интегральному уравнению Вольтерра I рода относительно частично симметричной функции K_{112} :

$$\int_{t-\omega_1}^t ds_1 \int_{t-\omega_1}^t ds_2 \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_{112}(s_1, s_2, s_3) ds_3 = f_{112}^{(1)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2),$$

$$\int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} ds_1 \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} ds_2 \int_{t-\omega_1}^t K_{112}(s_1, s_2, s_3) ds_3 = f_{112}^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2), \quad (21)$$

$$\int_{t-\omega_1-\omega_2}^t ds_1 \int_{t-\omega_1-\omega_2}^t ds_2 \int_{t-\omega_1}^t K_{112}(s_1, s_2, s_3) ds_3 = f_{112}^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2),$$

где $t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3$, $f_{112}^{(j)\gamma_1, \gamma_2}$, $j = \overline{1, 3}$, соответственно равны

$$\begin{aligned} f_{112}^{(1)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) &= \frac{y_2^{(1)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(1)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2)}{2\gamma_1^2\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_2(s_1) ds_1 - \\ &- \frac{1}{\gamma_2} \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_{22}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \\ &- \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_{222}(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3, \\ f_{112}^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) &= \frac{y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2)}{2\gamma_1^2\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{t-\omega_1}^t K_2(s_1) ds_1 - \\ &- \frac{1}{\gamma_2} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{22}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \\ &- \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{222}(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3, \\ f_{112}^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) &= \frac{y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(3)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2)}{2\gamma_1^2\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{t-\omega_1}^t K_2(s_1) ds_1 - \\ &- \frac{1}{\gamma_2} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^t \int_{t-\omega_1-\omega_2}^t K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{22}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \\ &- \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_{222}(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3. \end{aligned}$$

Здесь $y_2^{(1)}(t, \omega_1, \omega_2)$, $y_2^{(2)}(t, \omega_1, \omega_2)$ и $y_2^{(3)}(t, \omega_1, \omega_2)$ — отклики динамической системы на первую (18), вторую (19) и третью (20) серии входных воздействий. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{\hat{\alpha}_2} = \begin{vmatrix} \hat{\alpha}_{1,2} & \hat{\alpha}_{1,2}^2 & \hat{\alpha}_{1,2}^3 \\ \hat{\alpha}_{2,2} & \hat{\alpha}_{2,2}^2 & \hat{\alpha}_{2,2}^3 \\ \hat{\alpha}_{3,2} & \hat{\alpha}_{3,2}^2 & \hat{\alpha}_{3,2}^3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\alpha_i} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,i} & \alpha_{1,i}^2 \\ \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i}^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\alpha_1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & y^{\alpha_{1,1},0}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \alpha_{2,1} & y^{\alpha_{2,1},0}(\lambda_1, \lambda_2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\alpha_2}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & y^{0,\alpha_{1,2}}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \alpha_{2,2} & y^{0,\alpha_{2,2}}(\lambda_1, \lambda_2) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} \hat{\alpha}_{1,2} & \hat{\alpha}_{1,2}^2 & y^{0,\hat{\alpha}_{1,2}}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \hat{\alpha}_{2,2} & \hat{\alpha}_{2,2}^2 & y^{0,\hat{\alpha}_{2,2}}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \hat{\alpha}_{3,2} & \hat{\alpha}_{3,2}^2 & y^{0,\hat{\alpha}_{3,2}}(\lambda_1, \lambda_2) \end{vmatrix},$$

$$C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) = 2 \left(\gamma_1^2 \frac{\Delta_{\alpha_1}^{(2)}(t, \omega_1)}{\Delta_{\alpha_1}} + \gamma_2^2 \frac{\Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t, \omega_1)}{\Delta_{\alpha_2}} \right), \quad 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq T, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 2. Условия

$$\mathcal{D}_3 \overset{(j)}{y}_2(t, \omega_1, \omega_2) \in C_{\Delta_3}, \quad (22)$$

$$\mathcal{D}_3 = \frac{\partial^3}{\partial t \partial \omega_2^2} - \frac{\partial^3}{\partial t \partial \omega_1 \partial \omega_2} + \frac{\partial^3}{\partial \omega_1 \partial \omega_2^2} - \frac{\partial^3}{\partial \omega_1^2 \partial \omega_2}, \quad j = \overline{1, 3},$$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, 0, \omega_1) + \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, 0, \omega_1) &= \overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) + \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) = \\ &= \overset{(3)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, -\omega_1) + \overset{(3)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, -\omega_1) = 2y^{0, \gamma_2}(t, \omega_1), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) + \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) &= \overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, 0, \omega_1) + \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, 0, \omega_1) = \\ &= \overset{(3)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, 0, \omega_1) + \overset{(3)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, 0, \omega_1) = 2\gamma_1^2 \frac{\Delta_{\alpha_1}^{(2)}(t, \omega_1)}{\Delta_{\alpha_1}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, -\omega_1) + \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, -\omega_1) - C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) = \\ &= - \left(\overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) + \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) - C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) \right) = \\ &= \overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) + \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) - C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) = \\ &= - \left(\overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, -\omega_1) + \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, -\omega_1) - C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) \right) = \\ &= \overset{(3)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, 0) + \overset{(3)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, 0) - C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) = \\ &= - \left(\overset{(3)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) + \overset{(3)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) - C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) - \overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) - \\ &- \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) + \overset{(1)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) + \overset{(1)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) = \\ &= C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) + 2 \frac{\gamma_2^2}{\Delta_{\alpha_2}} \left(\Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t - \omega_1, \omega_2) - \Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right) + \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \frac{\gamma_2^3}{\Delta_{\hat{\alpha}_2}} \left(\Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t, \omega_1) + \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t - \omega_1, \omega_2) - \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right), \\ &\overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) - \overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2) - \\ &- \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2) - \overset{(2)}{y}_2^{\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, \omega_2, -\omega_2) - \overset{(2)}{y}_2^{-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, \omega_2, -\omega_2) = \\ &= 2 \frac{\gamma_1^2}{\Delta_{\alpha_1}} \Delta_{\alpha_1}^{(2)}(t - \omega_1, \omega_2) + 2 \frac{\gamma_2^2}{\Delta_{\alpha_2}} \left(\Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t, \omega_1) + \Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t - \omega_1, \omega_2) - \Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right) + \end{aligned}$$

$$+ 2\frac{\gamma_2^3}{\Delta_{\hat{\alpha}_2}} \left(\Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t, \omega_1) + \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t - \omega_1, \omega_2) - \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) + \\ & + y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) - y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) - y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) - \\ & - y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) - y_2^{(3)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) + y_2^{(3)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, 0) = \quad (28) \\ & = 2C_1^{\alpha_1, \alpha_2}(t, \omega_1) + 4\frac{\gamma_1^2}{\Delta_{\alpha_1}} \left(\Delta_{\alpha_1}^{(2)}(t - \omega_1, \omega_2) - \Delta_{\alpha_1}^{(2)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) + y_2^{(3)-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) - \\ & - \frac{1}{2} \left(y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, \omega_2, -\omega_2) + y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t - \omega_1, \omega_2, -\omega_2) - y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) - \right. \\ & \left. - y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) - y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2) - y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2) \right) = \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 3\frac{\gamma_1^2}{\Delta_{\alpha_1}} \Delta_{\alpha_1}^{(2)}(t - \omega_1, \omega_2) + \frac{\gamma_2^2}{\Delta_{\alpha_2}} \left(3\Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t, \omega_1) - \Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t - \omega_1, \omega_2) + \Delta_{\alpha_2}^{(2)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right) - \\ & - \frac{\gamma_2^3}{\Delta_{\hat{\alpha}_2}} \left(\Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t, \omega_1) + \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t - \omega_1, \omega_2) - \Delta_{\hat{\alpha}_2}^{(3)}(t, \omega_1 + \omega_2) \right), \\ & \mathcal{D}_3 \left(y_2^{(1)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(1)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) \right)_{\omega_2=0} = \quad (30) \\ & = \mathcal{D}_3 \left(y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(3)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) \right)_{\omega_2=0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_3 \left(y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(2)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) \right)_{\omega_1=0} = \quad (31) \\ & = \mathcal{D}_3 \left(y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) + y_2^{(3)-\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) \right)_{\omega_1=0} \end{aligned}$$

необходимы и достаточны для существования решения

$$K_{112}(s_1, s_2, s_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathcal{D}_3 f_{112}^{(1)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2), & s_1, s_2, s_3 \in \Omega_3^{(1)}, \\ -\frac{1}{2} \mathcal{D}_3 f_{112}^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2), & s_1, s_2, s_3 \in \Omega_3^{(2)}, \\ \frac{1}{2} \mathcal{D}_3 f_{112}^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2), & s_1, s_2, s_3 \in \Omega_3^{(3)}, \end{cases}$$

$t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3$, уравнения (21) в классе C_{Ω_3} .

Доказательство проводится стандартным образом, аналогично [5].

Тестовый пример. Проиллюстрируем выполнимость некоторых из полученных условий. Рассмотрим тестовую динамическую систему, отклики которой на тестовые серии входных воздействий (3) при $m = 2$, (10), (18)–(20) соответственно равны

$$y^{\alpha_{i,1},0}(t, \omega_1) = \sum_{m=1}^4 (\alpha_{i,1}\omega_1)^m, \quad y^{0,\alpha_{i,2}}(t, \omega_1) = \alpha_{i,2}\omega_1,$$

$$y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1) = \beta_1 t + \beta_2 \omega_1 + \beta_1 \beta_2 t \omega_1 + \beta_1^2 t^2 + \beta_1^2 \beta_2 t^2 \omega_1 + \beta_1^3 t^3 + \beta_1^4 t^4,$$

$$y_1^{(2)\beta_1, \beta_2}(t, \omega_1) = \beta_1 \omega_1 + \beta_2 t + \beta_1 \beta_2 t \omega_1 + \beta_1^2 \omega_1^2 + \beta_1^2 \beta_2 t \omega_1^2 + \beta_1^3 \omega_1^3 + \beta_1^4 \omega_1^4,$$

$$y_2^{(1)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) = \gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2 + \gamma_1 \gamma_2 \omega_1 \omega_2 + \gamma_1^2 \omega_1^2 + \gamma_1^2 \gamma_2 \omega_1^2 \omega_2 + \gamma_1^3 \omega_1^3 + \gamma_1^4 \omega_1^4, \quad (32)$$

$$y_2^{(2)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) = \gamma_2 \omega_1 + \gamma_1 \omega_2 + \gamma_1 \gamma_2 \omega_1 \omega_2 + \gamma_1^2 \omega_2^2 + \gamma_1^2 \gamma_2 \omega_1 \omega_2^2 + \gamma_1^3 \omega_2^3 + \gamma_1^4 \omega_2^4, \quad (33)$$

$$y_2^{(3)\gamma_1, \gamma_2}(t, \omega_1, \omega_2) = \gamma_1(\omega_1 + \omega_2) + \gamma_2 \omega_1 + \gamma_1 \gamma_2 \omega_1(\omega_1 + \omega_2) + \gamma_1^2(\omega_1 + \omega_2)^2 + \gamma_1^2 \gamma_2 \omega_1(\omega_1 + \omega_2)^2 + \gamma_1^3(\omega_1 + \omega_2)^3 + \gamma_1^4(\omega_1 + \omega_2)^4. \quad (34)$$

Считаем, что ядра Вольтерра K_i , K_{ii} , K_{iii} , $i = 1, 2$, восстановлены с учетом сделанных ранее предположений для α_i и $\hat{\alpha}_{j,i}$, $j = \overline{1, 3}$, так что

$$K_i(s_1) = 1 + 4\hat{\alpha}_{1,i}\hat{\alpha}_{2,i}\hat{\alpha}_{3,i}s_1^3, \quad K_{111} = 1, \quad K_{22} = K_{222} = 0,$$

$$K_{11}(s_1, s_2) = \frac{1}{2} + 6\alpha_1^2(s_1 - s_2)^2 = \frac{1}{2} - 6(\hat{\alpha}_{1,1}\hat{\alpha}_{2,1} + \hat{\alpha}_{1,1}\hat{\alpha}_{3,1} + \hat{\alpha}_{2,1}\hat{\alpha}_{3,1})(s_1 - s_2)^2 \quad (35)$$

(рассматриваемая динамическая система является линейной относительно $x_2(t)$, что справедливо для некоторых технических объектов, в частности для (7)). Очевидно, что при выборе амплитуд, используемых для восстановления K_1 и K_{11} , требуется согласование α_1 со значениями $\hat{\alpha}_{j,1}$, $j = \overline{1, 3}$. Из (35) следует $\alpha_1^2 = -(\hat{\alpha}_{1,1}\hat{\alpha}_{2,1} + \hat{\alpha}_{1,1}\hat{\alpha}_{3,1} + \hat{\alpha}_{2,1}\hat{\alpha}_{3,1})$. Отсюда, полагая для определенности $\hat{\alpha}_{3,1} = -(\hat{\alpha}_{1,1} + \hat{\alpha}_{2,1})$, получим

$$\alpha_1^2 = \hat{\alpha}_{1,1}^2 + \hat{\alpha}_{1,1}\hat{\alpha}_{2,1} + \hat{\alpha}_{2,1}^2. \quad (36)$$

Справедливость условий (12) и (22) очевидна. Подстановка

$$y^{\alpha_{i,1},0}(t, t) = \sum_{m=1}^4 (\alpha_{i,1}t)^m, \quad y_1^{(1)\beta_1, \beta_2}(t, 0) = \sum_{m=1}^4 (\beta_1 t)^m$$

в (13) с учетом (8) дает равенство

$$\beta_1 \alpha_1^4 t^3 + \beta_1^2 \alpha_1^4 t^4 = \beta_1^3 \alpha_1^2 t^3 + \beta_1^4 \alpha_1^2 t^4.$$

Отсюда вытекает условие

$$\beta_1^2 = \alpha_1^2. \quad (37)$$

Справедливость (14) проверяется аналогичным образом, при этом дополнительно к (37) получим

$$\beta_2^2 = \alpha_2^2. \quad (38)$$

Далее с учетом

$$y^{0,\gamma_2}(t, \omega_1) = \gamma_2 \omega_1$$

легко убедиться в выполнении (23). Подстановка (32)–(34) в (24) приводит к формуле

$$\omega_1^2 + \gamma_1^2 \omega_1^4 = \omega_1^2 + \alpha_1^2 \omega_1^4,$$

так что

$$\gamma_1^2 = \alpha_1^2. \quad (39)$$

Проверка условий (15)–(17) и (25)–(31) выполняется аналогично. Таким образом, условия вида (36)–(39) налагают дополнительные требования к выбору амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер K_{12} , K_{112} и являются условиями согласования с амплитудами тестовых сигналов, используемых для идентификации ядер Вольтерра в случае скалярных входных сигналов. Один из возможных способов выбора значений (масштаба) амплитуд в скалярном случае рассмотрен в [11].

Отметим, что нарушение условий теорем 1, 2 для откликов динамической системы не влияет на численное решение исследуемых интегральных уравнений, так как их сеточные аналоги, в силу невырожденности соответствующих систем линейных алгебраических уравнений, однозначно разрешимы при любой правой части (см., например, [5, с. 298–299]). Вместе с тем от выполнимости (8), (9), (36)–(39) существенно зависит точность численного моделирования. Так, применительно к отклику (7) на тех же сигналах, которые были использованы для идентификации ядер Вольтерра при $\alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} = r \neq 0$ из (8), максимальная относительная погрешность отклика кубической модели составила 3.943% для $r = 10^{-5}$, 10.848% для $r = 3 \cdot 10^{-5}$ и 17.759% для $r = 5 \cdot 10^{-5}$.

Приложение. Используя эталонную модель отклика (7) на входные сигналы $x_1(t) \equiv \Delta D(t)$, $x_2(t) \equiv \Delta Q(t)$ в элементе теплообменного аппарата и отклик математической модели

$$y_{et}(t) = \sum_{m=1}^3 \frac{1}{m!} \left(\int_0^t x_1(s) ds + \int_0^t x_2(s) ds \right)^m, \quad (40)$$

сравним точность моделирования $y_{1_{quad}}(t)$ по (4), (5) для $N = 2$, $p = 2$ с откликом $y_{2_{quad}}(t)$ модифицированного квадратичного полинома, содержащего нестационарные линейные слагаемые. Вычислительный эксперимент для каждой из динамических систем проводился с помощью разностных аналогов квадратичных полиномов, построенных с помощью метода средних прямоугольников на равномерной сетке $t_i = ih$, $T = nh$, $i = \overline{1, n}$, $T = 30$ с, $h = 1$ с. Ядра Вольтерра были настроены на тестовые сигналы с амплитудами $10 \leq \alpha \leq 25\%$ от начальных значений $D_0 = 0.16$ кг/с, $Q_0 = 100$ кВт для неравенства (7) и $x_{1_0} = x_{2_0} = 1$ для модели (40). В качестве критерия точности моделирования выбрано значение коэффициента «Mean Absolute Percentage Error» (MAPE) при $t = T$ (так как в приложениях важную роль играет величина отклика динамической системы в конце переходного процесса)

$$\text{MAPE}_r = \frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B \frac{|y_{r_{quad}}^\beta(T) - y_{et}^\beta(T)|}{y_{et}^\beta(T)} \cdot 100\%, \quad r = 1, 2.$$

На рисунке выделены области выполнения неравенства $\text{MAPE}_1 < \text{MAPE}_2$ для эталонных моделей (7) (область **1**) и (40) (область **2**) при $B = 25$ с точностью $\delta = 10^{-5}$ в случае скалярного входного воздействия $x_1(t)$ ($x_2(t) = 0$).

Рисунок. Результаты вычислительного эксперимента

Представленные области соответствуют сигналам $x_1^\beta(t) = \beta x_{1_0}(e(t) - e(t - \omega))$ (рисунок, а) и $x_1^\beta(t) = \beta x_{1_0}(e(t) - 2e(t - \omega) + e(t - T))$ (рисунок, б). Заметим, что область 2 на рисунке, а является подобластью области 1, а область 1 на рисунке, б принадлежит области 2. Было получено, что $\text{МАРЕ}_1 \leq 6.16\%$, $\text{МАРЕ}_2 \leq 5.85\%$ для модели (7) и $\text{МАРЕ}_1 \leq 10.64\%$, $\text{МАРЕ}_2 \leq 6.78\%$ для модели (40).

Вычислительный эксперимент показал, что области эффективности той или иной интегральной модели зависят от длины отрезка T , амплитуды α тестовых сигналов, используемых при идентификации ядер Вольтерра, длительности возмущающего воздействия ω , а также точности расчетов δ .

Заключение. В настоящей работе теоретически обоснованы необходимые условия существования несимметричной функции K_{12} в классе C_{Ω_2} и частично симметричной функции K_{112} в классе C_{Ω_3} . Проведено сопоставление точности моделирования с помощью стационарных и модифицированных квадратичных полиномов Вольтерра. Расчеты выполнены на примере тестовой математической модели и эталонной динамической системы, описывающей процессы теплообмена. Получено, что области предпочтительного использования стационарных полиномов для рассмотренных случаев имеют общие признаки расположения. В дальнейшем для выработки конкретных рекомендаций по выбору аппроксимирующего полинома, включающих условия на амплитуды α тестовых сигналов и длительность возмущающих воздействий ω , планируется расширить спектр тестовых моделей.

Литература

1. Fujii K., Nakao K. Identification of nonlinear dynamic systems without self-regulation using Volterra functional series // Trans. Soc. Instr. Control Eng. (Japan). 1971. Vol. 7, N 2. P. 129–136.
2. Павленко В. Д. Компенсационный метод идентификации нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерра // Труды Одесск. политехн. ун-та. 2009. № 2. С. 121–129.
3. Масри М. М. Методы и средства построения информационных моделей нелинейных динамических объектов для целей диагностики: дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02. Одесса: Одесск. нац. политехн. ун-т, 2015. 173 с.
4. Фомин А. А., Павленко В. Д., Фёдорова В. Д. Метод построения многомерной модели Вольтерра глазодвигательного аппарата // Электротехнические и компьютерные системы. 2015. № 19. С. 296–301.
5. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода в интегральных моделях динамических систем: теория, численные методы, приложения : дис. ... докт. физ.-мат. наук: 05.13.16. Иркутск: Иркутск. гос. ун-т, 2000. 319 с.
6. Apartsyn A. S. Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series // EPRI-SEI Joint Seminar. Beijing, China, 1991. P. 117–132.
7. Солодуша С. В. Численные методы идентификации несимметричных ядер Вольтерра и их

приложения в теплоэнергетике // Материалы XXIV конференции научной молодежи СЭИ СО РАН, Иркутск, 10–11.03.1994 г. Деп. в ВИНТИ 30.08.1994 г., № 2129-В94. С. 76–91.

8. Апарцин А. С., Таиров Э. А., Солодуша С. В., Худяков Д. В. Применение интегростепенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников // Изв. РАН. Энергетика. 1994. № 3. С. 138–145.

9. Таиров Э. А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 150–156.

10. Солодуша С. В., Сидоров Д. Н. О моделировании нелинейной динамики теплообменных процессов функциональными рядами Вольтерра // Труды Междунар. конференции «Средства математического моделирования», Санкт-Петербург, 3–6.12.1997 г. СПб.: СПбГУ, 1998. С. 221–229.

11. Апарцин А. С., Солодуша С. В. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 116–124.

12. Солодуша С. В. Численное моделирование динамики теплообмена модифицированным квадратичным полиномом Вольтерра // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 2. С. 84–94.

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2017 г.; принята к печати 15 марта 2018 г.

Контактная информация:

Солодуша Светлана Витальевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник; solodusha@isem.irk.ru

Quadratic and cubic Volterra polynomials: identification and application

S. V. Solodusha

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov ul., Irkutsk, 664033, Russian Federation

For citation: Solodusha S. V. Quadratic and cubic Volterra polynomials: identification and application. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 131–144. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.205>

Volterra kernels identification is the main problem in constructing an input-output type mathematical model of nonlinear dynamical system by a Volterra polynomial of N th order. Currently, various algorithms for solving this problem are proposed. Usually, it is assumed that the decomposition of the dynamical system response $y(t)$ into components is preliminarily performed. Each of components is due to the influence of the concrete integral term. In general, the separation problem is invariant with respect to a particular family of test actions, and the choice of amplitudes of the test signals used to identify the Volterra kernels is related to the necessary conditions for the solvability of the corresponding multidimensional integral equations in special classes of functions. In the present paper, existence theorems for solutions of two-dimensional and three-dimensional Volterra integral equations of the first kind are given. This result is obtained in terms of the amplitudes of the test signals. This will allow us to remove the arbitrariness in the choice of amplitudes in construction of the quadratic and cubic Volterra polynomials in the case when external action $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ is a vector function of time. Illustrative calculations are given through the dynamic reference systems.

Keywords: identification, Volterra kernels, integral equations, mathematical modeling.

References

1. Fujii K., Nakao K. Identification of nonlinear dynamic systems without self-regulation using Volterra functional series. *Trans. Soc. Instr. Control Eng. (Japan)*, 1971, vol. 7, no. 2, pp. 129–136.
2. Pavlenko V. D. Kompensatsionnyy metod identifikatsii nelineynykh dinamicheskikh sistem v vide yader Vol'terra [Compensation method for identification of nonlinear dynamic systems in the form of Vol-

terra kernels]. *Trudy Odesskogo politekhnicheskogo universiteta* [Proceedings of the Odessa Polytechnic University], 2009, vol. 2, pp. 121–129. (In Russian)

3. Masri M. M. *Metody i sredstva postroeniya informatsionnykh modeley nelineynykh dinamicheskikh ob"ektov dlya tseley diagnostiki* [Methods and tools for constructing information models of nonlinear dynamic objects for diagnostic purposes]. PhD tech. sci. diss. Odessa, Odessk. National Polytechnic University Publ., 2015, 173 p. (In Russian)

4. Fomin A. A., Pavlenko V. D., Fedorova V. D. Metod postroeniya mnogomernoy modeli Vol'terra glazodvigatel'nogo apparata [Method for constructing the Volterra multidimensional model of the eye-movement apparatus]. *Elektrotekhnicheskie i komp'yuternye sistemy* [Electrotechnical and Computer Systems], 2015, vol. 19, pp. 296–301. (In Russian)

5. Apartsyn A. S. *Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh dinamicheskikh sistem: teoriya, chislennye metody, prilozheniya* [Nonclassical Volterra equations of the first kind in integral models of dynamical systems: theory, numerical methods, applications]. Dr. phys.-math. sci. diss. Irkutsk, Irkutsk. Gos. University, 2000, 319 p. (In Russian)

6. Apartsyn A. S. Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series. *EPRI-SEI Joint Seminar*, Beijing, China, 1991, pp. 117–132.

7. Solodusha S. V. Chislennye metody identifikatsii nesimmetrichnykh yader Vol'terra i ikh prilozheniya v teploenergetike [Numerical methods for identification of asymmetric Volterra kernels and their applications in heat power engineering]. *Materialy XXIV konferentsii nauchnoy molodezhi SEI SO RAN* [Proceedings of the XXIV conference of young scientists SEI SB RAS]. Irkutsk, 10–11.03.1994 g. Deposited at VINITI 30.08.1994, no. 2129-B94, pp. 76–91. (In Russian)

8. Apartsyn A. S., Tairov E. A., Solodusha S. V., Khudyakov D. V. Primenenie integrostepennykh ryadov Vol'terra k modelirovaniyu dinamiki teploobmennikov [Application of integro-power Volterra series to modeling the dynamics of heat exchangers]. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 1994, vol. 3, pp. 28–42. (In Russian)

9. Tairov E. A. Nelineynoe modelirovanie dinamiki teploobmena v kanale s odnofaznym teplosositelem [Nonlinear modeling of the dynamics of heat transfer in a channel with single phase coolant]. *Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering and Transport], 1989, no. 1, pp. 150–156. (In Russian)

10. Solodusha S. V., Sidorov D. N. O modelirovanii nelineynoy dinamiki teploobmennyykh processov funktsional'nymi ryadami Vol'terra [On modelling of heat-exchange process nonlinear dynamics by functional Volterra series]. *Trudy Mezhdunar. konferentsii "Sredstva matematicheskogo modelirovaniya"* [Proceedings of conference "Mathematical Modelling Tools"]. Saint Petersburg, 3–6.12.1997. Saint Petersburg, SPbGTU Publ., 1998, pp. 221–229. (In Russian)

11. Apartsin A. S., Solodusha S. V. Ob optimizatsii testovykh signalov pri identifikatsii yader Vol'tera [Test signal amplitude optimization for identification of the Volterra kernels]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2004, vol. 65, no. 3, pp. 464–471. (In Russian)

12. Solodusha S. V. Chislennoe modelirovanie dinamiki teploobmena modifitsirovannym kvadratsionnym polinomom Vol'terra [Numerical modeling of heat exchange dynamics by modified quadratic Volterra polynomial]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2013, vol. 18, no. 2, pp. 83–94. (In Russian)

Author's Information:

Solodusha Svetlana V. — PhD Sci. in physics and mathematics, associate professor, leading researcher; solodusha@isem.irk.ru