УДК 519.87 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2018. Т. 14. Вып. 2
MSC 90B85, 15A80, 65K05, 90C48

Прямое решение минимаксной задачи размещения в прямоугольной области на плоскости с прямоугольной метрикой*

П. В. Плотников, Н. К. Кривулин

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Плотников П. В., Кривулин Н. К.* Прямое решение минимаксной задачи размещения в прямоугольной области на плоскости с прямоугольной метрикой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 116–130. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.204

Рассматривается минимаксная задача размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной (манхэттенской) метрикой с ограничениями на допустимую область размещения и предлагается ее прямое аналитическое решение при помощи методов тропической (идемпотентной) математики. При отсутствии ограничений эта задача, которая также известна как задача Ролса или задача посыльного, имеет известные геометрическое и алгебраическое решения. Исследуется решение данной задачи с учетом дополнительных ограничений на область размещения, которая задана в форме прямоугольника. Сначала задача записывается в терминах тропической математики как задача тропической оптимизации, вводится параметр для обозначения минимума целевой функции и задача сводится к решению параметризованной системы неравенств. Эта система решается относительно одной из переменных, а условия существования решений используются для нахождения оптимальных значений другой переменной с помощью вспомогательной задачи оптимизации. Затем полученное общее решение преобразуется в набор прямых решений, записанных в компактной замкнутой форме для различных случаев соотношений между исходными параметрами задачи. Приведены графические примеры решения задачи для разных вариантов расположения допустимой области размещения на плоскости.

Ключевые слова: задача размещения Ролса, размещение с ограничениями, прямоугольная метрика, идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация, полное решение.

1. Введение. Одной из перспективных и быстро развивающихся областей теоретической и прикладной математики является тропическая (идемпотентная) математика, которая связана с изучением теории и приложений полуколец с идемпотентным сложением [1–9]. В технике, экономике и управлении достаточно часто можно встретить оптимизационные задачи, которые формулируются и эффективно решаются в терминах тропической математики. Краткий обзор таких задач представлен, например, в работе [10]. Если традиционно использование операций max и min при формулировке математических постановок прикладных задач часто усложняет их решение, то на языке идемпотентной алгебры работа с такими операциями упрощается. Вследствие этого методы тропической математики могут оказаться удобными при решении минимаксных задач. Следует отметить важную особенность, заключающуюся в возможности преобразовывать нелинейные задачи в линейные в терминах тропической математики.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-010-00723).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

Существует класс задач оптимизации, в которых требуется найти наилучший способ размещения объектов на плоскости с дополнительными ограничениями на допустимую область исследования. Значительную роль при решении этих задач играет выбор метрики, при помощи которой осуществляется подсчет расстояний. Решения для некоторого класса задач размещения с чебышёвской и прямоугольной метриками в терминах тропической математики представлены в [11–13]. Решение в явном виде минимаксной задачи размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой без ограничений на область исследования изучено в статьях [14, 15]. Такого рода минимаксная задача обычно называется *задачей Ролса* или *задачей посыльного*. Хорошо известно [16, 17] геометрическое решение данной задачи. Изучение задачи с ограничением в виде отрезка прямой линии проведено в работе [18].

Настоящее исследование направлено на дальнейшее развитие и применение методов тропической оптимизации для решения задач размещения. Рассматривается минимаксная задача размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной (манхэттенской) метрикой с ограничениями на допустимую область. Такая задача может встречаться, например, при оптимальном размещении объектов экстренной помощи населению (противопожарные службы, службы скорой помощи и др.) в городах с дорожной сетью в виде параллельных и перпендикулярных между собой улиц, при котором минимизируется расстояние от объекта до самого дальнего возможного очага возгорания или самого удаленного места проживания больного. Другие примеры включают оптимальное размещение сервера локальной сети (центрального пульта систем видеонаблюдения, охранной и пожарной сигнализаций и т. п.) в зданиях и сооружениях с прямоугольными и перпендикулярными друг другу маршрутами прокладки проводных линий связи по критерию минимизации потерь при передаче сигнала.

В рассматриваемой задаче ограничения на область размещения представлены в виде произвольного прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат (линиям дорожной сети, линиям связи). При решении применяется подход, развитый в работе [10], который заключается в замене исходной задачи оптимизации, записанной в терминах тропической математики, на параметризованную систему неравенств. На основании этого подхода найдено прямое полное решение задачи, представленное в терминах тропической математики, а также в обычной форме. В отличие от известных алгоритмических решений полученный результат описывает все множество решений в явном виде с помощью простых расчетных формул, удобных как для дальнейшего анализа решений, так и для непосредственных вычислений. Это позволяет эффективно решать задачу размещения в случаях, когда алгоритмическое решение оказывается по тем или иным причинам невозможным или нецелесообразным.

2. Задача размещения на плоскости с ограничениями. Рассмотрим минимаксную задачу размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой, которая заключается в поиске на основе уже имеющегося набора объектов новой точки из $S \subset \mathbb{R}^2$, расстояние от которой до самого дальнего объекта из набора с учетом некоторого дополнительного слагаемого было бы минимальным.

Расстояние в прямоугольной метрике между двумя точками $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|. \tag{1}$$

Пусть задан набор точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$ и чисел $h_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Числа h_i могут отражать дополнительные затраты, связанные с перемещением между объектами. Например, в задачах, где точки описывают положение объектов на

горизонтальной плоскости, эти числа могут иметь смысл высоты (вертикальной координаты) объекта. Введем функцию $\phi(\boldsymbol{x})$, которая определяет максимальное расстояние от точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ до набора точек $\boldsymbol{r}_i$ следующим образом:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} (\rho(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x}) + h_i) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + h_i) = \phi(x_1, x_2). \tag{2}$$

Предположим также, что заданы числа $f, g, p, q \in \mathbb{R}$ такие, что $f \leqslant g$ и $p \leqslant q$. Определим допустимую область размещения как прямоугольник

$$S = \{(x_1, x_2)^T \mid \quad f \leqslant x_1 \leqslant g,\ p \leqslant x_2 \leqslant q\}. \tag{3}$$

Рассматриваемая минимаксная задача размещения точечного объекта с ограничениями в форме прямоугольника S формулируется так:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} \quad \phi(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

Для решения такого рода задачи могут быть применены различные подходы. Например, с помощью методов линейного программирования можно получить алгоритмическое итерационное решение задачи, но этот подход не гарантирует прямого решения в явном виде. Для построения такого аналитического решения в п. 6 будет использован аппарат тропической математики.

3. Элементы тропической математики. Введем числовое множество $\mathbb{X}$, на котором определены ассоциативные и коммутативные операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. Обозначим через $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ заданное на $\mathbb{X}$ при помощи этих операций коммутативное полукольцо с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$. Сложение будем считать идемпотентным (т. е. для любого числа $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$), а умножение обратимым (т. е. для каждого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$). Так как $\langle \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}, \mathbb{1}, \otimes \rangle$ образует коммутативную группу по умножению, то описанную структуру $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ принято называть *идемпотентным полуполем.*

Операция возведения в степень с целым показателем вводится стандартным образом. Для любого ненулевого числа $x \in \mathbb{X}$ и натурального числа n определим $x^0 = \mathbb{1}$, $x^n = x \otimes x^{n-1}$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$ и $\mathbb{0}^n = \mathbb{0}$. Будем считать, что операция возведения в целую степень ненулевого числа x может быть распространена на случай произвольного показателя степени.

Далее для упрощения математических выкладок знак умножения $\otimes$ в алгебраических выражениях, как обычно, будет опускаться.

В силу того, что сложение идемпотентно, можно задать отношение частичного порядка $\leqslant$ так: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Из этого определения следуют неравенства $x \leqslant x \oplus y$ и $y \leqslant x \oplus y$, а также равносильность неравенства $x \oplus y \leqslant z$ и системы неравенств $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$ для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$. Кроме того, нетрудно проверить свойства монотонности операций сложения и умножения, по которым при условии $x \leqslant y$ для любого z выполняются неравенства $x \oplus z \leqslant y \oplus z$ и $xz \leqslant yz$. Наконец, для любых $x, y \neq \mathbb{0}$ из неравенства $x \leqslant y$ следует $x^{-1} \geqslant y^{-1}$. В дальнейшем будем дополнительно предполагать, что введенный частичный порядок — линейный. Кроме того, несложно проверить неравенство $x^{1/2} y^{1/2} \leqslant x \oplus y$, которое является тропическим аналогом неравенства между геометрическим и арифметическим средними.

В качестве примеров алгебраических структур описываемого типа можно привести вещественные идемпотентные полуполя

$$\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle, \qquad \mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, +\infty, 0, \min, + \rangle,$$
$$\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, 0, 1, \max, \times \rangle, \qquad \mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, +\infty, 1, \min, \times \rangle,$$

где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$.

Нулевым элементом для полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, которое называют $(\max, +)$-*алгеброй*, служит $-\infty$, единичным — число 0. В этом полуполе любому числу $x \in \mathbb{R}$ можно сопоставить обратный x^{-1}, который совпадает с противоположным числом $-x$ в обычной алгебре. Для любой пары чисел $x, y \in \mathbb{R}$ можно определить степень x^y, которая равна арифметическому произведению xy. Порядок, порожденный операцией идемпотентного сложения, совпадает с обычным линейным порядком на множестве $\mathbb{R}$.

4. Задачи тропической оптимизации с ограничениями. Рассмотрим задачи оптимизации, сформулированные в терминах тропической математики (задачи тропической оптимизации), с одной и двумя переменными.

Сначала исследуется задача оптимизации с одной переменной, решение которой было получено в работе [18]. Будет показано, как это решение может быть записано в другой форме, более удобной для последующего применения. Затем формулируется новая задача тропической оптимизации с двумя переменными.

Предположим, что необходимо найти ненулевые решения $t \in \mathbb{X}$ задачи

$$\begin{aligned} \min \quad & at^{-1} \oplus bt \oplus c, \\ & f \leqslant t \leqslant g, \end{aligned} \tag{5}$$

где a, b, c, f, g — числа из $\mathbb{X}$, удовлетворяющие условию $a, b, c, g > \mathbb{0}$.

Решение этой задачи дает следующий результат [18].

Лемма. *Минимум в задаче* (5) *равен* $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf \oplus c$ *и достигается тогда и только тогда, когда*

$$t = (\mu^{-1}a \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1}b \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{6}$$

Преобразуем утверждение леммы к другому, более удобному для дальнейшего использования виду.

Следствие 1. *Минимум в задаче* (5) *равен* $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf \oplus c$ *и справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$, *то* $t = a^{1/2}b^{-1/2}$;
2) *если* $\mu = ag^{-1}$, *то* $t = g$;
3) *если* $\mu = bf$, *то* $t = f$;
4) *если* $\mu = c$, *то* $t = (ac^{-1} \oplus f)^{1-\alpha}(bc^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha}$ *для любого* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. Представим t из формулы (6) в виде двойного неравенства

$$\mu^{-1}a \oplus f \leqslant t \leqslant (\mu^{-1}b \oplus g^{-1})^{-1}.$$

Рассмотрим возможные значения μ. Пусть $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$. После подстановки в предыдущую формулу и применения свойств монотонности идемпотентного сложения получим

$$a^{1/2}b^{-1/2} \leqslant a^{1/2}b^{-1/2} \oplus f \leqslant t \leqslant (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \leqslant a^{1/2}b^{-1/2},$$

откуда можно заключить, что $t = a^{1/2}b^{-1/2}$.

Аналогично проверяем, что при $\mu = ag^{-1}$ будем иметь $t = g$, а при $\mu = bf$ значение t будет равно f.

Если $\mu = c$, то сохраним представление для t в параметрической форме. □

Полученные выражения для решения представим в более компактной форме.

Следствие 2. *Минимум в задаче* (5) *равен* $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf \oplus c$ *и справедливы такие утверждения*:

1) *если* $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf$, *то* $t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f$;

2) *если* $\mu = c$, *то* $t = (ac^{-1} \oplus f)^{1-\alpha}(bc^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. Объединим результаты первых трех пунктов в формулировке следствия 1 в один. Заметим, что общее значение минимума μ может быть записано как сумма $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf$. Покажем, что все величины, при которых достигается минимум, вычисляются по формуле $t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f$.

Предположим, что $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$. Тогда выполняются неравенства $a^{1/2}b^{1/2} \geqslant ag^{-1}$ и $a^{1/2}b^{1/2} \geqslant bf$, которые после преобразования могут быть записаны так: $a^{-1/2}b^{1/2} \geqslant g^{-1}$ и $a^{1/2}b^{-1/2} \geqslant f$. Тогда $t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f = a^{1/2}b^{-1/2}$, что соответствует результату 1) следствия 1.

Аналогичным образом проверяем, что при $\mu = ag^{-1}$ выполняется равенство $t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f = g$, а при $\mu = bf$ — равенство $t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f = f$. $\square$

Теперь рассмотрим новую задачу тропической оптимизации с двумя переменными.

Пусть заданы числа $a, b, c, d, f, p, g, q > \mathbb{0}$. Требуется найти решения $t, s > \mathbb{0}$ задачи

$$\begin{aligned} \min \quad & at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts, \\ & f \leqslant t \leqslant g, \qquad p \leqslant s \leqslant q. \end{aligned} \tag{7}$$

В п. 5 дадим прямое полное решение этой задачи.

5. Решение задачи с двумя переменными. Общая схема решения задачи (7) следующая. Сначала вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, и задача сводится к решению параметризованной системы неравенств. Эта система решается относительно одной из переменных, а условия существования решений используются для нахождения оптимальных значений другой переменной с помощью вспомогательной задачи оптимизации. Затем полученное общее решение задачи преобразуется в набор прямых решений, записанных в компактной замкнутой форме для различных случаев соотношений между исходными параметрами задачи.

Все решения рассматриваемой задачи описывает следующий результат.

Теорема 1. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \qquad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp.$$

Минимум в задаче (7) *равен* $\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}$ *и справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2}c^{1/2}$ *и* $v = bq^{-1}$ *или при* $u = aq^{-1}$, *то*

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \quad s = q;$$

2) *если* $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2}c^{1/2}$ *и* $v = dp$ *или при* $u = cp$, *то*

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus c^{1/2}p^{1/2})(d^{1/2}p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \quad s = p;$$

3) *если* $\mu = ug^{-1}$, *то* $t = g$ *и* $s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p$;

4) *если* $\mu = vf$, *то* $t = f$ *и* $s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p$;

5) *если* $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$, *то*

$$t = (a^{-1/2}d^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(a^{-1/2}d^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \quad s = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1};$$

6) *если* $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$, *то*

$$t = (b^{-1/2}c^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(b^{-1/2}c^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \quad s = b^{1/2}c^{-1/2}t,$$

где α *— вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (7) через μ. Тогда все решения задачи определяются системой, состоящей из уравнения и двух неравенств:

$$at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts = \mu, \quad f \leqslant t \leqslant g, \quad p \leqslant s \leqslant q.$$

В силу того, что μ — минимальное значение целевой функции, равенство в первом уравнении можно заменить на неравенство и записать систему так:

$$at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts \leqslant \mu, \quad f \leqslant t \leqslant g, \quad p \leqslant s \leqslant q.$$

Полученная система неравенств эквивалентна системе

$$at^{-1}s^{-1} \leqslant \mu, \quad bts^{-1} \leqslant \mu, \quad ct^{-1}s \leqslant \mu, \quad dts \leqslant \mu, \quad f \leqslant t, \quad t \leqslant g, \quad p \leqslant s, \quad s \leqslant q.$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей, например первого и четвертого неравенств, дает $ad \leqslant \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geqslant a^{1/2}d^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решим систему относительно неизвестного s, считая t параметром.

Решения неравенств $at^{-1}s^{-1} \leqslant \mu$ и $bts^{-1} \leqslant \mu$ относительно s имеют вид $s \geqslant \mu^{-1}at^{-1}$ и $s \geqslant \mu^{-1}bt$. Объединив их с условием $s \geqslant p$, получим $s \geqslant \mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p$.

Рассмотрим неравенства $ct^{-1}s \leqslant \mu$ и $dts \leqslant \mu$, которые решим относительно s^{-1}, чтобы получить $s^{-1} \geqslant \mu^{-1}ct^{-1}$ и $s^{-1} \geqslant \mu^{-1}dt$. Найденные решения вместе с условием $s^{-1} \geqslant q^{-1}$ приводят к неравенству $s^{-1} \geqslant \mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1}$ или к эквивалентному ему неравенству $s \leqslant (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1}$.

Записывая вместе неравенства для s и граничные условия на t, получим систему

$$\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p \leqslant s \leqslant (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1}, \quad f \leqslant t \leqslant g. \tag{8}$$

Множество значений s, удовлетворяющих первому неравенству, непусто, если выполняется условие $\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p \leqslant (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1}$, которое равносильно условию

$$(\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p)(\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1}) \leqslant \mathbb{1}.$$

Раскроем скобки в левой части, а затем заменим это неравенство эквивалентной системой неравенств, включая $pq^{-1} \leqslant \mathbb{1}$, которое прямо следует из условия $p \leqslant q$. Решение остальных неравенств системы относительно μ дает

$$\begin{array}{llll} \mu \geqslant a^{1/2}c^{1/2}t^{-1}, & \mu \geqslant a^{1/2}d^{1/2}, & \mu \geqslant b^{1/2}c^{1/2}, & \mu \geqslant b^{1/2}d^{1/2}t, \\ \mu \geqslant aq^{-1}t^{-1}, & \mu \geqslant dpt, & \mu \geqslant cpt^{-1}, & \mu \geqslant bq^{-1}t. \end{array}$$

Построенная система с учетом граничных условий на t равносильна паре неравенств

$$\mu \geqslant a^{1/2}d^{1/2} \oplus a^{1/2}c^{1/2}t^{-1} \oplus b^{1/2}d^{1/2}t \oplus b^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1}t^{-1} \oplus dpt \oplus cpt^{-1} \oplus bq^{-1}t,$$
$$f \leqslant t \leqslant g.$$

Заметим, что переход от исходной задачи к полученной системе, в которой μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого вытекает, что первое неравенство системы задает точную нижнюю границу для μ, выраженную через t, а потому теперь необходимо решить задачу оптимизации следующего вида:

$$\min \ (a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp)t^{-1} \oplus (b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp)t \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, \quad f \leqslant t \leqslant g. \tag{9}$$

Введем такие обозначения:

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \quad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp, \quad w = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}. \tag{10}$$

Задача (9) может быть записана в форме (5), где a заменяется на u, b на v и c на w. Применение вышеизложенной леммы для решения задачи дает минимальное значение

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus w,$$

причем, согласно следствию 1, выполняются следующие условия:

1) если $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$, то $t = u^{1/2}v^{-1/2}$;
2) если $\mu = ug^{-1}$, то $t = g$;
3) если $\mu = vf$, то $t = f$;
4) если $\mu = w$, то $t = (w^{-1}u \oplus f)^{1-\alpha}(w^{-1}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Теперь уточним полученное решение, рассматривая различные значения, которые может принимать величина μ.

5.1. Случай $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$**.** В этом случае $t = u^{1/2}v^{-1/2}$, а двойное неравенство (8) для s можно записать в виде

$$u^{-1}a \oplus v^{-1}b \oplus p \leqslant s \leqslant (u^{-1}c \oplus v^{-1}d \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые могут принимать u и v в соответствии с формулами (10). Пусть $u = a^{1/2}c^{1/2}$, тогда $\mu = a^{1/4}c^{1/4}v^{1/2}$, а $t = a^{1/4}c^{1/4}v^{-1/2}$. Проверим, какие значения может принимать v, и найдем соответствующие величины t и s.

Исследуем случай, когда выполняется равенство $v = b^{1/2}d^{1/2}$. В силу тропического аналога неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим выполняется неравенство

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} = a^{1/4}b^{1/4}c^{1/4}d^{1/4} \leqslant a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2} = w.$$

С учетом условия $\mu = u^{1/2}v^{1/2} \geqslant w$ оно приводит к равенству $\mu = w$, а потому решение при $v = b^{1/2}d^{1/2}$ можно рассматривать как частный случай для общего случая $\mu = w$, который будет изучен ниже.

Предположим, что $v = bq^{-1}$. Тогда выполняются равенства $\mu = a^{1/4}b^{1/2}c^{1/4}q^{-1/2}$ и $t = a^{1/4}b^{-1/2}c^{1/4}q^{1/2}$. Из двойного неравенства для s получим

$$q \leqslant a^{1/2}c^{-1/2} \oplus q \oplus p \leqslant s \leqslant (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus b^{-1}qd \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant q,$$

откуда следует, что $s = q$.

Если $v = dp$, то $\mu = a^{1/4}c^{1/4}d^{1/2}p^{1/2}$ и $t = a^{1/4}c^{1/4}d^{-1/2}p^{-1/2}$, а неравенство для s приводит к результату

$$p \leqslant a^{-1/2}c^{-1/2}a \oplus d^{-1}p^{-1}b \oplus p \leqslant s \leqslant (a^{-1/2}c^{-1/2}c \oplus p^{-1} \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant p,$$

который показывает, что $s = p$.

Пусть $u = aq^{-1}$. Тогда $\mu = a^{1/2}q^{-1/2}v^{1/2}$ и $t = a^{1/2}q^{-1/2}v^{-1/2}$. Кроме того,

$$q \leqslant a^{-1}qa \oplus v^{-1}b \oplus p \leqslant s \leqslant (a^{-1}qc \oplus v^{-1}d \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant q,$$

а значит, $s = q$.

При $u = cp$ выполняются $\mu = c^{1/2}p^{1/2}v^{1/2}$ и $t = c^{1/2}p^{1/2}v^{-1/2}$. Имеем неравенство

$$p \leqslant c^{-1}p^{-1}a \oplus v^{-1}b \oplus p \leqslant s \leqslant (p^{-1} \oplus v^{-1}d \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant p,$$

из которого вытекает, что $s = p$.

Записывая вместе предыдущие результаты для $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$, находим, что

- при $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$ выполняются $t = a^{1/4}b^{-1/2}c^{1/4}q^{1/2}$ и $s = q$;
- при $u = aq^{-1}$ выполняются $t = a^{1/2}q^{-1/2}v^{-1/2}$ и $s = q$;
- при $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = dp$ выполняются $t = a^{1/4}c^{1/4}d^{-1/2}p^{-1/2}$ и $s = p$;
- при $u = cp$ выполняются $t = c^{1/2}p^{1/2}v^{-1/2}$ и $s = p$.

Покажем, что выражения для t, которые соответствуют значениям $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$ или значению $u = aq^{-1}$, можно представить с помощью одной формулы: $t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}$.

Предположим, что выполнены условия $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$. Из первого условия следует, что $u = a^{1/2}c^{1/2} \geqslant aq^{-1}$, а значит $a^{1/4}c^{1/4} \geqslant a^{1/2}q^{-1/2}$. Учитывая, что $v^{1/2} = b^{1/2}q^{-1/2}$, получим $t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1} = a^{1/4}b^{-1/2}c^{1/4}q^{1/2}$.

В случае, если $u = aq^{-1}$, выполняется неравенство $aq^{-1} \geqslant a^{1/2}c^{1/2}$, из которого вытекает, что $a^{1/2}q^{-1/2} \geqslant a^{1/4}c^{1/4}$. Кроме того, всегда выполняется неравенство $v \geqslant bq^{-1}$. Следовательно, $t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1} = a^{1/2}q^{-1/2}v^{-1/2}$.

Аналогичным образом проверяем, что при $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = dp$ и при $u = cp$ справедливо общее выражение для t в виде $t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus c^{1/2}p^{1/2})(d^{1/2}p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}$.

5.2. Случай $\mu = ug^{-1}$**.** В этом случае $t = g$, а неравенство (8) принимает форму

$$u^{-1}a \oplus u^{-1}bg^2 \oplus p \leqslant s \leqslant (u^{-1}c \oplus u^{-1}dg^2 \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Найдем соответствующие значения для s и μ при различных величинах u.

Предположим, что $u = a^{1/2}c^{1/2}$. Тогда $\mu = a^{1/2}c^{1/2}g^{-1}$. Учитывая, что $t = g$, из двойного неравенства для s получаем

$$a^{1/2}c^{-1/2} \leqslant a^{1/2}c^{-1/2} \oplus a^{-1/2}bc^{-1/2}g^2 \oplus p \leqslant s \leqslant$$
$$\leqslant (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus a^{-1/2}c^{-1/2}dg^2 \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant a^{1/2}c^{-1/2},$$

откуда вытекает равенство $s = a^{1/2}c^{-1/2}$.

Аналогичным образом находим, что при $u = aq^{-1}$ выполняются равенства $\mu = aq^{-1}g^{-1}$ и $s = q$, а при $u = cp$ — равенства $\mu = cpg^{-1}$ и $s = p$.

Нетрудно проверить, что все значения s, при которых достигается минимум в этом случае, вычисляются по формуле $s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p$.

Пусть, например, $u = a^{1/2}c^{1/2}$. В этом случае выполняются условия $a^{1/2}c^{1/2} \geqslant aq^{-1}$ и $a^{1/2}c^{1/2} \geqslant cp$. Они эквивалентны неравенствам $a^{-1/2}c^{1/2} \geqslant q^{-1}$ и $a^{1/2}c^{-1/2} \geqslant p$, откуда следует, что $s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p = a^{1/2}c^{-1/2}$.

Случаи, когда $u = aq^{-1}$ и $u = cp$, проверяются аналогично.

5.3. Случай $\mu = vf$**.** Учитывая, что здесь $t = f$, неравенство (8) имеет вид

$$v^{-1}af^{-2} \oplus v^{-1}b \oplus p \leqslant s \leqslant (v^{-1}cf^{-2} \oplus v^{-1}d \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Если $v = b^{1/2}d^{1/2}$, то $\mu = b^{1/2}d^{1/2}f$. Из двойного неравенства для s вытекает, что

$$b^{1/2}d^{-1/2} \leqslant v^{-1}af^{-2} \oplus b^{1/2}d^{-1/2} \oplus p \leqslant s \leqslant (v^{-1}cf^{-2} \oplus b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant b^{1/2}d^{-1/2},$$

а тогда выполняется равенство $s = b^{1/2}d^{-1/2}$.

Аналогичным образом можно проверить, что при $v = bq^{-1}$ выполняются равенства $\mu = bq^{-1}f$ и $s = q$, а при $v = dp$ — равенства $\mu = dpf$ и $s = p$. Все значения s, при которых достигается минимум в этом случае, вычисляются по формуле $s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p$. Если, например, $v = b^{1/2}d^{1/2}$, то справедливы неравенства $b^{1/2}d^{1/2} \geqslant bq^{-1}$ и $b^{1/2}d^{1/2} \geqslant dp$, которые равносильны условиям $b^{-1/2}d^{1/2} \geqslant q^{-1}$ и $b^{1/2}d^{-1/2} \geqslant p$. Это означает, что $s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p = b^{1/2}d^{-1/2}$.

Аналогично можно проверить случаи $v = bq^{-1}$ и $v = dp$.

5.4. Случай $\mu = w$**.** В этом случае выражение для t включает параметр α. Покажем, что при этом величина s может принимать только два значения.

Пусть сначала $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$. Тогда неравенство (8) для s имеет вид

$$a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}bd^{-1/2}t \oplus p \leqslant s \leqslant (a^{-1/2}cd^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}d^{1/2}t \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Для выражений слева и справа выполняются неравенства

$$a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1} \leqslant a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}bd^{-1/2}t \oplus p,$$

$$(a^{-1/2}cd^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}d^{1/2}t \oplus q^{-1})^{-1} \leqslant (a^{-1/2}d^{1/2}t)^{-1} = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1},$$

откуда можно сделать вывод, что $s = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1}$, где

$$t = (a^{-1/2}d^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(a^{-1/2}d^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

При $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$ таким же образом получим, что $s = b^{1/2}c^{-1/2}t$, где

$$t = (b^{-1/2}c^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(b^{-1/2}c^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Исследование этого случая завершает доказательство теоремы. □

Сформулируем полученный результат в более компактной форме.

Следствие 3. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \quad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp, \quad w = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}.$$

Минимум в задаче (7) *равен* $\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus w$ *и достигается тогда и только тогда, когда*

$$t = (\mu^{-1}u \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \tag{11}$$

$$s = (\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p)^{1-\alpha}(\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-\alpha}, \tag{12}$$

где α *— вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что множество решений (t, s) задачи (7) описывается при помощи двойного неравенства

$$\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p \leqslant s \leqslant (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1},$$

где величина t является решением задачи (9), которое может быть получено с помощью леммы в параметрической форме (11).

Ясно, что двойное неравенство для s также может быть записано как равенство

с использованием некоторого параметра. Заметим, что в каждом из случаев решения, исследованных в теореме 1, по крайней мере одна из величин t и s определяется однозначно без помощи параметров. В силу этого параметрическое представление для s можно также записать с использованием параметра α в виде (12). $\square$

6. Приложение к задаче размещения. Рассмотрим задачу размещения (4) и представим ее в терминах тропической математики. Сначала, применив операции идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, определим расстояние (1) между двумя векторами:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1^{-1} y_1 \oplus y_1^{-1} x_1)(x_2^{-1} y_2 \oplus y_2^{-1} x_2).$$

Для заданного набора точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$ и чисел $h_i \in \mathbb{R}$, где $i = 1, \ldots, m$, целевую функцию (2) запишем следующим образом:

$$\phi(x_1, x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} h_i (x_1^{-1} r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1} x_1)(x_2^{-1} r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1} x_2).$$

Чтобы упростить полученное выражение, введем дополнительные обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} h_i r_{1i} r_{2i}, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} h_i r_{1i}^{-1} r_{2i}, \quad c = \bigoplus_{i=1}^{m} h_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \quad d = \bigoplus_{i=1}^{m} h_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, запишем целевую функцию так:

$$\phi(x_1, x_2) = a x_1^{-1} x_2^{-1} \oplus b x_1 x_2^{-1} \oplus c x_1^{-1} x_2 \oplus d x_1 x_2.$$

С учетом ограничений (3) задача (4) принимает форму задачи (7), где $t = x_1$ и $s = x_2$. Применение теоремы 1 дает следующий результат.

Теорема 2. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2} c^{1/2} \oplus a q^{-1} \oplus c p, \qquad v = b^{1/2} d^{1/2} \oplus b q^{-1} \oplus d p.$$

Минимум в задаче (4) *равен* $\mu = u^{1/2} v^{1/2} \oplus u g^{-1} \oplus v f \oplus a^{1/2} d^{1/2} \oplus b^{1/2} c^{1/2}$ *и справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mu = u^{1/2} v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2} c^{1/2}$ *и* $v = b q^{-1}$ *или при* $u = a q^{-1}$, *то*

$$x_1 = (a^{1/4} c^{1/4} \oplus a^{1/2} q^{-1/2})(b^{1/2} q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \quad x_2 = q;$$

2) *если* $\mu = u^{1/2} v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2} c^{1/2}$ *и* $v = d p$ *или при* $u = c p$, *то*

$$x_1 = (a^{1/4} c^{1/4} \oplus c^{1/2} p^{1/2})(d^{1/2} p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \quad x_2 = p;$$

3) *если* $\mu = u g^{-1}$, *то* $x_1 = g$ *и* $x_2 = (a^{-1/2} c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p$;
4) *если* $\mu = v f$, *то* $x_1 = f$ *и* $x_2 = (b^{-1/2} d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p$;
5) *если* $\mu = a^{1/2} d^{1/2}$, *то*

$$x_1 = (a^{-1/2} d^{-1/2} u \oplus f)^{1-\alpha} (a^{-1/2} d^{-1/2} v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \quad x_2 = a^{1/2} d^{-1/2} x_1^{-1};$$

6) *если* $\mu = b^{1/2} c^{1/2}$, *то*

$$x_1 = (b^{-1/2} c^{-1/2} u \oplus f)^{1-\alpha} (b^{-1/2} c^{-1/2} v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \quad x_2 = b^{1/2} c^{-1/2} x_1,$$

где α *— вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Опишем найденное решение с использованием обычных обозначений.

Следствие 4. *Введем обозначения*

$$a = \max_{1\leqslant i\leqslant m}(h_i + r_{1i} + r_{2i}), \qquad b = \max_{1\leqslant i\leqslant m}(h_i - r_{1i} + r_{2i}),$$
$$c = \max_{1\leqslant i\leqslant m}(h_i + r_{1i} - r_{2i}), \qquad d = \max_{1\leqslant i\leqslant m}(h_i - r_{1i} - r_{2i}),$$
$$u = \max((a+c)/2, a-q, c+p), \qquad v = \max((b+d)/2, b-q, d+p).$$

Минимум в задаче (4) *равен* $\mu = \max((u+v)/2, u-g, v+f, (a+d)/2, (b+c)/2)$ *и справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mu = (u+v)/2$ *при* $u = (a+c)/2$ *и* $v = b-q$ *или при* $u = a-q$, *то*

$$x_1 = \max((a+c)/4, (a-q)/2) - \max((b-q)/2, v/2), \quad x_2 = q;$$

2) *если* $\mu = (u+v)/2$ *при* $u = (a+c)/2$ *и* $v = d+p$ *или при* $u = c+p$, *то*

$$x_1 = \max((a+c)/4, (c+p)/2) - \max((d+p)/2, v/2), \quad x_2 = p;$$

3) *если* $\mu = u-g$, *то* $x_1 = g$ *и* $x_2 = \max(-\max((-a+c)/2, -q), p)$;
4) *если* $\mu = v+f$, *то* $x_1 = f$ *и* $x_2 = \max(-\max((-b+d)/2, -q), p)$;
5) *если* $\mu = (a+d)/2$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max((-a-d)/2+u, f) - \alpha\max((-a-d)/2+v, -g), \quad x_2 = (a-d)/2 - x_1;$$

6) *если* $\mu = (b+c)/2$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max((-b-c)/2+u, f) - \alpha\max((-b-c)/2+v, -g), \quad x_2 = (b-c)/2 + x_1,$$

где α — *вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Заметим, что вычислительная сложность решения задачи размещения в соответствии со следствием 4 является линейной по числу точек m.

Приведем примеры применения полученных результатов. Пусть имеется $n = 11$ исходных точек на плоскости с координатами

$$\boldsymbol{r}_1 = (3,\ 7)^T,\ \ \boldsymbol{r}_2 = (4,\ 4)^T,\ \ \boldsymbol{r}_3 = (5,\ 3)^T,\ \ \boldsymbol{r}_4 = (5,\ 9)^T,\ \ \boldsymbol{r}_5 = (6,\ 6)^T,\ \ \boldsymbol{r}_6 = (7,\ 3)^T,$$
$$\boldsymbol{r}_7 = (7,\ 8)^T,\ \ \boldsymbol{r}_8 = (8,\ 4)^T,\ \ \boldsymbol{r}_9 = (9,\ 2)^T,\ \ \boldsymbol{r}_{10} = (10,\ 7)^T,\ \ \boldsymbol{r}_{11} = (11,\ 4)^T.$$

Для простоты будем считать, что $h_i = 0$ для всех i. Зададим четыре различных области размещения:

$$S_1 = \{(x_1, x_2)^T \mid \ 4 \leqslant x_1 \leqslant 10,\ 3 \leqslant x_2 \leqslant 9\},$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2)^T \mid \ 2 \leqslant x_1 \leqslant 12,\ 1 \leqslant x_2 \leqslant 5.5\},$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2)^T \mid \ 2 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 1 \leqslant x_2 \leqslant 11\},$$
$$S_4 = \{(x_1, x_2)^T \mid \ 2 \leqslant x_1 \leqslant 12,\ 8 \leqslant x_2 \leqslant 11\}.$$

В результате применения расчетных формул из следствия 4 для задач с областями размещения S_1, S_2, S_3 и S_4 получим решения, в которых оптимальное размещение описывается следующими парами координат:

$$x_1 = \alpha + 6.5, \qquad x_1 = 0.5\alpha + 6.5, \qquad x_1 = 5, \qquad x_1 = 7.5,$$
$$x_2 = \alpha + 5, \qquad x_2 = 0.5\alpha + 7, \qquad x_2 = 5, \qquad x_2 = 8,$$

где параметр α удовлетворяет условию $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

На рисунке, *а*, *б*, *в*, *г* представлены результаты решения задач размещения в прямоугольных областях. Кружками обозначены элементы исходного множества объектов, а пунктирным прямоугольником — допустимая область размещения. Множество точек оптимального размещения изображено отрезком жирной линии или жирной точкой.

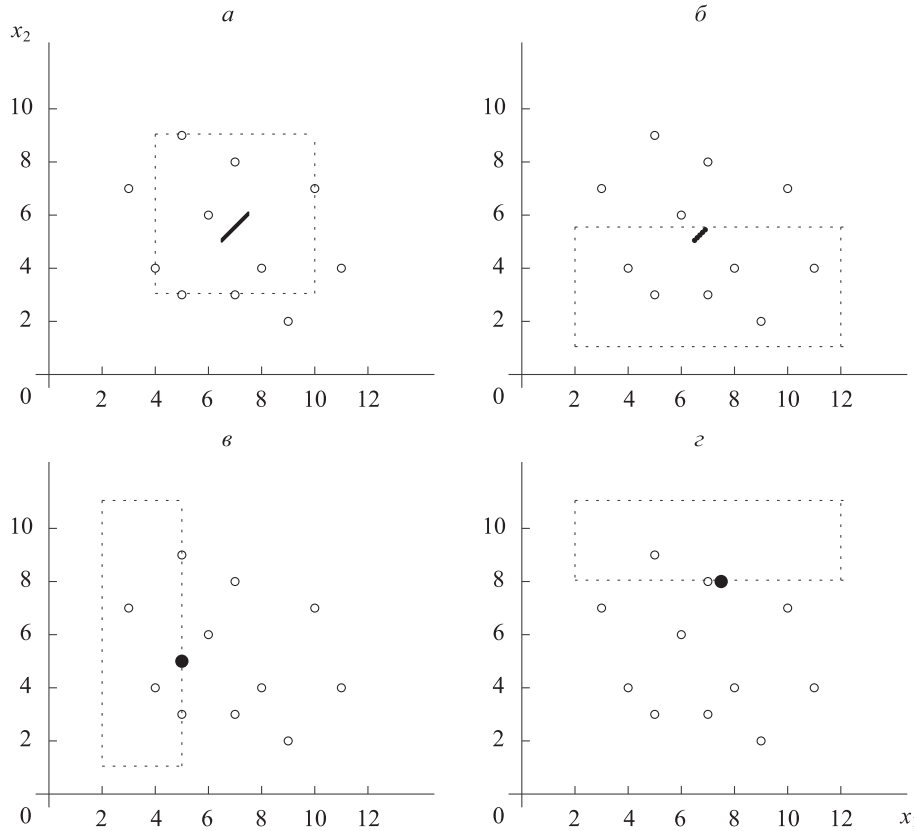

Рисунок. Оптимальное размещение в областях S_1 (*а*), S_2 (*б*), S_3 (*в*) и S_4 (*г*)

6. Заключение. В работе рассмотрена задача размещения в прямоугольной области на плоскости с прямоугольной метрикой. На основе применения методов тропической оптимизации получено прямое полное решение задачи, представленное в форме, которая является удобной для дальнейшего анализа решений и пригодной для непосредственных расчетов с невысокой вычислительной сложностью.

Дальнейшие исследования могут включать решение задач размещения на плоскости с допустимой областью, отличной от прямоугольной, а также задач размещения в трехмерном пространстве.

Литература

1. *Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and linearity. Chichester: Wiley, 1993. 514 p. (Wiley Series in Probability and Statistics)

2. *Маслов В. П., Колокольцев В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

3. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications // Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 90 / ed. by P. W. Hawkes. San Diego: Academic Press, 1994. P. 1–121. DOI: 10.1016/S1076-5670(08)70083-1

4. *Golan J. S.* Semirings and affine equations over them. New York: Springer, 2003. 256 p. (Vol. 556 of Mathematics and its Applications). DOI: 10.1007/978-94-017-0383-3

5. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max plus at work. Princeton: Princeton University Press, 2006. 226 p. (Princeton Series in Applied Mathematics)

6. *McEneaney W. M.* Max-plus methods for nonlinear control and estimation. Boston: Birkhäuser, 2006. 241 p. (Systems and Control: Foundations and Applications). DOI: 10.1007/0-8176-4453-9

7. *Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E. I.* Tropical algebraic geometry. Basel: Birkhäuser, 2007. 104 p. (Vol. 35 of Oberwolfach Seminars). DOI: 10.1007/978-3-7643-8310-7

8. *Gondran M., Minoux M.* Graphs, dioids and semirings. New York: Springer, 2008. 383 p. (Vol. 41 of Operations Research/ Computer Science Interfaces). DOI: 10.1007/978-0-387-75450-5

9. *Butkovič P.* Max-linear systems. London: Springer, 2010. 272 p. (Springer Monographs in Mathematics). DOI: 10.1007/978-1-84996-299-5

10. *Krivulin N. K.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129. DOI: 10.1080/02331934.2013.84062

11. *Krivulin N. K.* Algebraic solutions to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // Recent Researches in Applied and Computational Mathematics: Intern. conference on Applied and Computational Mathematics (ICACM'11). WSEAS, 2011. P. 157–162.

12. *Krivulin N. K.* Algebraic solution to a constrained rectilinear minimax location problem on the plane // Multimedia Technology (ICMT), 2011 Intern. conference on. IEEE, 2011. P. 6216–6220. DOI: 10.1109/ICMT.2011.6002526

13. *Krivulin N. K.* A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Transactions on Mathematics. 2012. Vol. 11, N 7. P. 605–614.

14. *Krivulin N. K.* An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. 2011. Vol. 44, iss. 4. P. 272–281. DOI: 10.3103/S1063454111040078

15. *Krivulin N. K., Plotnikov P. V.* On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. 2015. Vol. 48, iss. 2. P. 75–81. DOI: 10.3103/S1063454115020065

16. *Elzinga J., Hearn D. W.* Geometrical solutions for some minimax location problems // Transport. Sci. 1972. Vol. 6, N 4. P. 379–394. DOI: 10.1287/trsc.6.4.379

17. *Francis R. L.* A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem // AIIE Trans. 1972. Vol. 4, N 4. P. 328–332. DOI: 10.1080/05695557208974870

18. *Krivulin N. K., Plotnikov P. V.* Using tropical optimization to solve minimax location problems with rectilinear metric on the line // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. 2016. Vol. 3(61), iss. 4. P. 602–614. DOI: 10.3103/S1063454116040087

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 27 декабря 2017 г.; принята к печати 15 марта 2018 г.

Контактная информация:

Плотников Павел Владимирович — аспирант; pavplot@gmail.com

Кривулин Николай Кимович — докт. физ.-мат. наук, профессор; nkk@math.spbu.ru

Direct solution of a minimax location problem on the plane with rectilinear metric in a rectangular area

P. V. Plotnikov, N. K. Krivulin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Plotnikov P. V., Krivulin N. K. Direct solution of a minimax location problem on the plane with rectilinear metric in a rectangular area. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 116–130. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.204

A minimax single-facility location problem with rectilinear (Manhattan) metric is examined under constraints on the feasible location region, and a direct, explicit solution of the problem is suggested using methods of tropical (idempotent) mathematics. When no constraints are imposed, this problem, which is also known as the Rawls problem or the messenger boy problem, has known geometric and algebraic solutions. In the present article, a solution to the problem is investigated subject to constraints on the feasible region, which is given by a rectangular area. At first, the problem is represented in terms of tropical mathematics as a tropical optimization problem, a parameter is introduced to represent the minimum value of the objective function, and the problem is reduced to a parametrized system of inequalities. This system is solved for one variable, and the existence conditions of solution are used to obtain optimal values of the second parameter by using an auxiliary optimization problem. Then, the obtained general solution is transformed into a set of direct solutions, written in a compact closed form for different cases of relations between the initial parameters of the problem. Graphical illustrations of the solution are given for several positions of the feasible location region on the plane.

Keywords: Rawls location problem, constrained location, rectilinear metric, idempotent semifield, tropical optimization, complete solution.

References

1. Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P. *Synchronization and linearity.* Chichester, Wiley Press, 1993, 514 p. (Wiley Series in Probability and Statistics)

2. Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N. *Idempotentnyj analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [*Idempotent analysis and its applications in optimal control*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 144 p. (In Russian)

3. Cuninghame-Green R. A. Minimax algebra and applications. *Advances in Imaging and Electron Physics, vol. 90* / ed. by P. W. Hawkes. San Diego, Academic Press, 1994, pp. 1–121. DOI: 10.1016/S1076-5670(08)70083-1

4. Golan J. S. *Semirings and affine equations over them.* New York, Springer Press, 2003, 256 p. (Vol. 556 of Mathematics and its Applications). DOI: 10.1007/978-94-017-0383-3

5. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max plus at work.* Princeton, Princeton University Press, 2006, 226 p. (Princeton Series in Applied Mathematics)

6. McEneaney W. M. *Max-plus methods for nonlinear control and estimation.* Boston, Birkhäuser Press, 2006, 241 p. (Systems and Control: Foundations and Applications). DOI: 10.1007/0-8176-4453-9

7. Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E. I. *Tropical algebraic geometry.* Basel, Birkhäuser Press, 2007, 104 p. (Vol. 35 of Oberwolfach Seminars). DOI: 10.1007/978-3-7643-8310-7

8. Gondran M., Minoux M. *Graphs, dioids and semirings.* New York, Springer Press, 2008, 383 p. (Vol. 41 of Operations Research/ Computer Science Interfaces). DOI: 10.1007/978-0-387-75450-5

9. Butkovič P. *Max-linear systems.* London, Springer Press, 2010, 272 p. (Springer Monographs in Mathematics). DOI: 10.1007/978-1-84996-299-5

10. Krivulin N. K. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 5, pp. 1107–1129. DOI: 10.1080/02331934.2013.84062

11. Krivulin N. K. Algebraic solutions to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance. *Recent Researches in Applied and Computational Mathematics. Intern. conference on Applied and Computational Mathematics* (*ICACM'11*), WSEAS, 2011, pp. 157–162.

12. Krivulin N. K. Algebraic solution to a constrained rectilinear minimax location problem on the plane. *Multimedia Technology* (*ICMT*)*, 2011 Intern. conference on.* IEEE, 2011, pp. 6216–6220. DOI: 10.1109/ICMT.2011.6002526

13. Krivulin N. K. A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 2012, vol. 11, no. 7, pp. 605–614.

14. Krivulin N. K. An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent

algebra and solution of the Rawls location problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, 2011, vol. 44, iss. 4, pp. 272–281. DOI: 10.3103/S1063454111040078

15. Krivulin N. K., Plotnikov P. V. On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, 2015, vol. 48, iss. 2, pp. 75–81. DOI: 10.3103/S1063454115020065

16. Elzinga J., Hearn D. W. Geometrical solutions for some minimax location problems. *Transport. Sci.*, 1972, vol. 6, no. 4, pp. 379–394. DOI: 10.1287/trsc.6.4.379

17. Francis R. L. A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem. *AIIE Trans.*, 1972, vol. 4, no. 4, pp. 328–332. DOI: 10.1080/05695557208974870

18. Krivulin N. K., Plotnikov P. V. Using tropical optimization to solve minimax location problems with rectilinear metric on the line. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, 2016, vol. 3(61), iss. 4, pp. 602–614. DOI: 10.3103/S1063454116040087

Author's Information:

Plotnikov Pavel V. — postgraduate student; pavplot@gmail.com

Krivulin Nikolai K. — Dr. Sci. in physics and mathematics, professor; nkk@math.spbu.ru