УДК 519.85+51-74 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2018. Т. 14. Вып. 2
MSC 90C25

Равновесное распределение потоков по маршрутам линейной транспортной сети как решение системы линейных алгебраических уравнений*

А. Ю. Крылатов[1,2], *А. П. Широколобова*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

[2] Институт проблем транспорта им. Н. С. Соломенко РАН, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, 12-я линия В. О., 13

Для цитирования: *Крылатов А. Ю., Широколобова А. П.* Равновесное распределение потоков по маршрутам линейной транспортной сети как решение системы линейных алгебраических уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 103–115. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.203

Настоящая работа ориентирована на развитие методологических инструментов, позволяющих поддерживать процессы принятия решений в области управления улично-дорожной сетью крупных городов. При этом реализация управленческих воздействий подразумевает наличие возможностей оказывать влияние на объект управления. В сфере управления транспортными потоками необходимо иметь возможность оказывать воздействие на транспортные потоки. Однако в первую очередь необходимо иметь исчерпывающую информацию о транспортных потоках. С практической точки зрения наиболее ценной является информация о потоках на маршрутах, нежели о потоках на дугах транспортной сети. Изучена модель распределения потоков по маршрутам линейной транспортной сети. Линейность сети (линейные функции задержек на дугах) позволит сводить решение задачи распределения потоков к системе линейных уравнений и условий в виде выполнения ряда линейных неравенств. Формализована транспортная сеть в виде ориентированного графа произвольной топологии. Задача распределения транспортных потоков по маршрутам поставлена в виде задачи условной нелинейной оптимизации. Доказана теорема сводимости задачи распределения потоков по маршрутам линейной транспортной сети к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и неравенств. Детально разобран пример применения конструктивного доказательства теоремы сведения задачи распределения потоков по маршрутам транспортной сети к СЛАУ.

Ключевые слова: условная нелинейная оптимизация, конкурентное равновесие Вардропа, распределение потоков по маршрутам транспортной сети.

1. Введение. Принципы Вардропа распределения транспортных потоков были сформулированы в 1952 г. и заключались в том, что любая транспортная система по прошествии некоторого времени приходит в равновесное состояние [1]. Согласно первому принципу, «время передвижения по всем используемым маршрутам одинаково для всех участников движения и меньше времени, которое потратит любой участник движения, изменив свой маршрут» [1, с. 345], а по второму, «среднее время передвижения является минимальным» [1, с. 345]. При этом распределение потоков в соответствии с первым принципом Вардропа называется *конкурентным равновесием*,

* Работа А. Ю. Крылатова выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-10069). (A. Yu. Krylatov was jointly supported by a grant from the Russian Science Foundation (Project N 17-71-10069))

а распределение потоков по второму — *системным оптимумом*. Впервые математическую формулировку этих принципов предложил Бекманн [2]. Впоследствии данная математическая модель стала классической [3] и является одним из ключевых методологических инструментов в теории транспортных потоков [4, 5].

Отметим, что идея Вардропа равновесного распределения потоков относится к области так называемых поведенческих моделей (behavioral models), современный исчерпывающий обзор которых можно найти в [6]. Однако распределение потоков по дугам транспортной сети может быть оценено не только на основе моделирования поведения участников движения при выборе ими маршрута следования. Впервые набор эвристических правил, позволяющих получать оценки нагрузки транспортных потоков на дуги улично-дорожной сети, был предложен Г. В. Шелейховским в 1936 г. [7]. Математическое доказательство сходимости метода Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями было дано в 1967 г. [8]. В 1970 г. Вильсон выделил энтропийный подход для моделирования распределения транспортных потоков [9]. Содержательно, математически формализованный метод Шелейховского можно отнести именно к энтропийному подходу. Воплощение развиваемых в данном направлении идей применительно к улично-дорожной сети Санкт-Петербурга можно найти в [10, 11].

Сейчас во многих исследованиях большое внимание обращается на распределение транспортных потоков. Связан такой интерес прежде всего с тем, что развитие моделей и методов решения задачи распределения потоков в сети, с одной стороны, дает богатые прикладные результаты, с другой — позволяет получать новые подходы и алгоритмы решения различного рода оптимизационных задач. Таким образом, развитие данного направления вносит вклад как в теорию (условная нелинейная оптимизация, математическое программирование, исследование операций и т. д.), так и в практику (поддержка принятия решений на транспорте, городские транспортные навигационные системы, системы транспортного планирования и т. п.). Среди зарубежных авторов, вносящих вклад в развитие моделей и методов равновесного распределения потоков, в первую очередь следует выделить Патрикссона [12], среди отечественных — И. В. Коннова [13, 14] и В. В. Мазалова [15, 16]. Среди последних наших статей укажем [17, 18], теоретико-игровые постановки можно найти в [19, 20].

Настоящая работа ориентирована на развитие методологических инструментов, позволяющих поддерживать процессы принятия решений в области управления улично-дорожной сетью крупных городов. При этом реализация управленческих воздействий подразумевает наличие возможностей оказывать влияние на объект управления. В сфере управления транспортными потоками необходимо иметь возможность воздействовать на транспортные потоки. Однако прежде всего следует иметь исчерпывающую информацию о транспортных потоках. С практической точки зрения наиболее ценной является информация о потоках на маршрутах, нежели о потоках на дугах транспортной сети. В статье будет изучена модель распределения потоков по маршрутам линейной транспортной сети согласно первому принципу Вардропа. Линейность сети (линейные функции задержек на дугах) позволит сводить решение задачи распределения потоков к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и выполнению ряда линейных неравенств.

Статья построена следующим образом. Общей постановке математической задачи распределения потоков по дугам транспортной сети посвящен п. 2. В п. 3 исследована линейная сеть из параллельных неоднородных маршрутов, доказана конструктивная теорема сведения задачи распределения потоков по дугам транспортной сети к СЛАУ относительно переменных значений потоков по маршрутам транспортной сети. В п. 4 детально разобран пример использования методики, взятой из доказательства теоремы (п. 3), к конкретной транспортной сети. В п. 5 даны основные выводы по работе.

2. Распределение потоков по дугам транспортной сети. Традиционно в качестве искомых переменных в задаче распределения транспортных потоков применяются значения потоков на дугах транспортной сети (*link-route formulation*) [21]. Рассмотрим формализацию такой задачи на примере транспортной сети, представленной ориентированным связным графом $G = (V, E)$. Введем такие обозначения: V — множество последовательно пронумерованных узлов графа G; E — множество последовательно пронумерованных дуг графа G; W — множество пар узлов графа G (районов отправления—прибытия), $w \in W$; R^w — множество маршрутов между парой $w \in W$; x_e — транспортный поток по дуге $e \in E$, $x = (\ldots, x_e, \ldots)$; f_r^w — транспортный поток по маршруту $r \in R^w$, $f^w = \{f_r^w\}_{r \in R^w}$ и $f = \{f^w\}_{w \in W}$; F^w — совокупный транспортный спрос между парой $w \in W$; $t_e(x_e)$ — время передвижения (задержка) по дуге $e \in E$ потока x_e; $\delta_{e,r}^w$ — индикатор, равный

$$\delta_{e,r}^w = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } e \in E \text{ «входит» в маршрут } r \in R^w, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача поиска конкурентного равновесия Вардропа в сети, представленной как граф G, может быть сформулирована в виде следующей задачи условной нелинейной оптимизации [21]:

$$f^* = \arg \min_f \sum_{e \in E} \int\limits_0^{x_e} t_e(u) du \tag{1}$$

при

$$\sum_{r \in R^w} f_r^w = F^w \qquad \forall w \in W, \tag{2}$$

$$f_r^w \geqslant 0 \qquad \forall r \in R^w, \;\; w \in W, \tag{3}$$

где

$$x_e = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R^w} f_r^w \delta_{e,r}^w \qquad \forall e \in E. \tag{4}$$

Другими словами, доказано, что решение задачи (1)–(4) приводит к такому распределению потоков, что время движения по всем используемым маршрутам одинаково и меньше времени движения по неиспользуемым маршрутам между каждой парой $w \in W$ [21].

При этом, как следует из вида задачи (1)–(4), в традиционной постановке задачи распределения потоков в качестве искомых переменных берутся значения потоков на дугах транспортной сети. В общем случае невозможно восстановить значения потоков по маршрутам по имеющимся величинам потоков по дугам транспортной сети. Тем не менее значения потоков по маршрутам транспортной сети являются важным управленчески значимым параметром. В п. 3 будет изложен подход нахождения распределения потоков по маршрутам линейной транспортной сети посредством решения СЛАУ для случая линейной транспортной сети.

3. Распределение потоков по маршрутам транспортной сети. Вначале рассмотрим транспортную сеть из параллельных маршрутов с одной парой исток—сток. Будем считать, что каждый из параллельных (альтернативных) маршрутов состоит из дуг с разными характеристиками. В таком случае данную сеть будем называть сетью из параллельных *неоднородных* маршрутов. Введем следующие обозначения: R — множество параллельных (непересекающихся) маршрутов между парой исток—сток; l_r — количество последовательно соединенных дуг маршрута $r \in R$; F — транспортный спрос между парой исток—сток; f_i — распределяемый транспортный поток по маршруту r, $f = (\ldots, f_r, \ldots)$, $\sum_{r \in R} f_r = F$; h_{rj} — стационарный (не зависящий от потока по маршруту) транспортный поток на дуге j маршрута r, $h_{rj} \geqslant 0$, $r \in R$; $t_{rj}(f_r, h_{rj}) = a_{rj} + b_{rj}\,(f_r + h_{rj})$ — время движения по загруженной дуге j маршрута r, $a_{rj} \geqslant 0$ (время свободного движения по дуге), $b_{rj} > 0$ (величина, обратная пропускной способности дуги), $j = \overline{1, l_r}$, $r \in R$. Сформулируем задачи поиска конкурентного равновесия и системного оптимума Вардропа на сети из параллельных каналов в виде оптимизационных программ:

$$\min_f \sum_{r \in R} \sum_{j=1}^{l_r} \int\limits_0^{f_r} t_{rj}(u, h_{rj}) du \tag{5}$$

при ограничениях

$$\sum_{r \in R} f_r = F, \tag{6}$$

$$f_r \geqslant 0 \quad \forall r \in R. \tag{7}$$

Заметим, что в записи функционала (5) в качестве аргумента функции $t_{rj}(.)$ фигурирует (f_r, h_{rj}) для всех $j = \overline{1, l_r}$, $r \in R$, несмотря на то, что управляемыми параметрами в сформулированных задачах являются распределяемые потоки f, а стационарные потоки h_{rj} для всех $j = \overline{1, l_r}$, $r \in R$, входят в функционал как заданные параметры. Такая формализация произведена намеренно ввиду важности той смысловой нагрузки, которую величины h_{rj}, $j = \overline{1, l_r}$, $r \in R$, будут нести в дальнейших построениях.

Введем дополнительные обозначения:

$$a_r = \sum_{j=1}^{l_r} a_{rj}, \quad b_r = \sum_{j=1}^{l_r} b_{rj}, \quad h_r = \sum_{j=1}^{l_r} b_{rj} h_{rj}, \tag{8}$$

где величина a_r может быть интерпретирована как время свободного движения по всему маршруту r, состоящему из l_r дуг; b_r — как характеристика пропускной способности всего маршрута; h_r — как характеристика нагрузки стационарных потоков на весь маршрут.

Лемма. *Без умаления общности будем считать, что маршруты перенумерованы таким образом, что*

$$a_1 + h_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{|R|} + h_{|R|}. \tag{9}$$

Тогда конкурентное равновесие в линейной сети из параллельных неоднородных маршрутов единственно (*с точностью до обозначений*) *и достигается следующим распределением транспортных потоков*:

$$f_r^* = \frac{F + \sum_{s=1}^{r^*} \frac{a_s + h_s}{b_s}}{b_r \sum_{s=1}^{r^*} \frac{1}{b_s}} - \frac{a_r + h_r}{b_r}, \qquad r \leqslant r^*, \tag{10}$$

$$f_r^* = 0, \quad r^* < r \leqslant |R|,$$

где r^* определяется из условий

$$\sum_{r=1}^{r^*} \frac{a_{r^*} + h_{r^*} - a_r - h_r}{b_r} \leqslant F < \sum_{r=1}^{r^*} \frac{a_{r^*+1} + h_{r^*+1} - a_r - h_r}{b_r}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае линейных функций задержек целевая функция (5) является выпуклой, в то время как множество ограничений (6), (7) линейное. Таким образом, для задачи (5)–(7) условия Куна—Таккера относятся к необходимым и достаточным. Построим для задачи (5) с ограничениями (6), (7) лагранжиан

$$L = \sum_{r\in R} \int_0^{f_r} (a_r + b_r u + h_r) du + \mathfrak{t}^* \left(F - \sum_{r\in R} f_r \right) + \sum_{r\in R} \eta_r(-f_r)$$

и продифференцируем его:

$$\frac{\partial L}{\partial f_r} = (a_r + b_r f_r + h_r) - \mathfrak{t}^* - \eta_r \quad \forall r \in R. \tag{11}$$

Согласно условию дополнительной нежесткости, $\eta_r {f_r}^* = 0$ для всех $r \in R$. Таким образом, в силу (11), получаем

$$a_r + b_r f_r + h_r \begin{cases} = \mathfrak{t}^* & \text{при } {f_r}^* > 0, \\ \geqslant \mathfrak{t}^* & \text{при } {f_r}^* = 0, \end{cases} \quad \forall r \in R,$$

откуда имеем

$${f_r}^* = \begin{cases} \frac{\mathfrak{t}^* - a_r - h_r}{b_r} & \text{при } a_r + h_r < \mathfrak{t}^*, \\ 0 & \text{при } a_r + h_r \geqslant \mathfrak{t}^*, \end{cases} \quad \forall r \in R.$$

Если при выполнении (9) выбрать r^* таким образом, что

$$a_{r^*} + h_{r^*} \leqslant \mathfrak{t}^* < a_{r^*+1} + h_{r^*+1}, \tag{12}$$

то

$$\sum_{r=1}^{r^*} f_r = \sum_{r=1}^{r^*} \frac{\mathfrak{t}^* - a_r - h_r}{b_r} = F,$$

откуда

$$\mathfrak{t}^* = \frac{F + \sum_{s=1}^{r^*} \frac{a_s + h_s}{b_s}}{\sum_{s=1}^{r^*} \frac{1}{b_s}}.$$

В свою очередь, для определения r воспользуемся условием (12) и придем к требуемому.

В силу того, что условия Куна—Таккера необходимые и достаточные для задачи (5)–(8), найденное решение является единственным (с точностью до обозначений). Лемма доказана.

Отметим, что примененные при доказательстве леммы методологические приемы также использовались при исследовании сети из параллельных однородных маршрутов в работе [22]. Но при этом предполагалось, что маршруты неоднородны, т. е. состоят из дуг с разными характеристиками, а также учитывалась возможность наличия на всех дугах сети стационарных потоков. Под стационарным потоком понимается поток на дуге, который создает на ней стационарную нагрузку. Другими словами, считается, что каждой дуге присущи не только такие характеристики как пропускная способность и время свободного движения, но и стационарный поток. Таким образом, полученный, благодаря лемме, результат позволяет найти равновесное распределение потоков на сети из параллельных каналов в случае, когда на дугах сети уже имеется нагрузка в виде стационарных потоков.

Обобщим результаты на случай сети произвольной топологии. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Оптимизационная задача* (1)–(3) *с линейными функциями задержки* $t_e(x_e) = a_e + b_e x_e$, $a_e \geqslant 0$, $b_e > 0$, *для всех* $e \in E$ *эквивалентна системе линейных уравнений и неравенств относительно переменных потоков по маршрутам* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае линейных функций задержек целевая функция (1) выпуклая, в то время как множество ограничений (2), (3) является линейным. Таким образом, для задачи (1)–(3) условия Куна—Таккера необходимы и достаточны. Построим для задачи (1) с ограничениями (2), (3) лагранжиан

$$L = \sum_{e \in E} \int\limits_0^{\sum_{w \in W} \sum_{r \in R^w} f_r^w \delta_{e,r}^w} t_e(u)du + \sum_{w \in W} \mathfrak{t}^w \left(F^w - \sum_{r \in R^w} f_r^w \right) + \sum_{w \in W} \sum_{r \in R^w} \eta_r^w (-f_r^w)$$

и продифференцируем его, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial f_r^w} \int\limits_0^{\sum_{\nu \in W} \sum_{p \in R^\nu} f_p^\nu \delta_{e,p}^\nu} t_e(u)du = t_e \left(\sum_{\nu \in W} \sum_{p \in R^\nu} f_p^\nu \delta_{e,p}^\nu \right) \frac{\partial}{\partial f_r^w} \left(\sum_{\nu \in W} \sum_{p \in R^\nu} f_p^\nu \delta_{e,p}^\nu \right) =$$

$$= t_e \left(\sum_{\nu \in W} \sum_{p \in R^\nu} f_p^\nu \delta_{e,p}^\nu \right) \delta_{e,r}^w \overset{(4)}{=} t_e(x_e) \delta_{e,r}^w \quad \forall e \in E,\ r \in R^w,\ w \in W.$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial f_r^w} = \sum_{e \in E} t_e(x_e) \delta_{e,r}^w - \mathfrak{t}^w - \eta_r^w \quad \forall r \in R^w,\ w \in W. \tag{13}$$

Согласно условию дополнительной нежесткости, $\eta_r^w f_r^w = 0$ для всех $r \in R^w$, $w \in W$. Таким образом, в силу (13), имеем

$$\sum_{e \in E} t_e(x_e) \delta_{e,r}^w \begin{cases} = \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w > 0, \\ \geqslant \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w = 0, \end{cases} \quad \forall r \in R^w,\ w \in W. \tag{14}$$

Левая часть выражения (14) есть время движения по маршруту $r \in R^w$ (сумма времен движения по всем дугам, входящим в этот маршрут).

Рассмотрим произвольный маршрут $r \in R^w$ между парой $w \in W$. С точностью до обозначений будем считать, что маршрут r состоит из дуг j, $j = \overline{1, l_r^w}$, где l_r^w — количество дуг маршрута $r \in R^w$. В таком случае выражение (14) с точностью до обозначений может быть переписано в виде

$$\sum_{j=1}^{l_r^w} t_{rj}(x_{rj}) \begin{cases} = \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w > 0, \\ \geqslant \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w = 0, \end{cases} \qquad \forall r \in R^w,\ w \in W,$$

что в случае линейных функций задержек на дугах сети приводит к формуле

$$\sum_{j=1}^{l_r^w} (a_{rj} + b_{rj}x_{rj}) \begin{cases} = \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w > 0, \\ \geqslant \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w = 0, \end{cases} \qquad \forall r \in R^w,\ w \in W. \tag{15}$$

По маршруту $r \in R^w$ между парой $w \in W$ распределяется поток $f_r^w \geqslant 0$, который проходит по каждой дуге данного маршрута j, $j = \overline{1, l_r^w}$. При этом по каждой дуге j, $j = \overline{1, l_r^w}$, могут быть распределены потоки других маршрутов f_p^ν, $p \in R^\nu$, $\nu \in W$. Для каждой дуги j, $j = \overline{1, l_r^w}$, сумму таких потоков будем обозначать h_{rj}^w для всех $j \in r$, $r \in R^w$, $w \in W$. Другими словами, для дуги j маршрута $r \in R^w$ между парой $w \in W$ имеет место равенство $x_{rj} = f_r^w + h_{rj}^w$. Таким образом, от (15) переходим к выражению

$$\sum_{j=1}^{l_r^w} \left(a_{rj} + b_{rj}(f_r^w + h_{rj}^w)\right) \begin{cases} = \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w > 0, \\ \geqslant \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w = 0, \end{cases} \qquad \forall r \in R^w,\ w \in W. \tag{16}$$

Введем обозначения

$$a_r^w = \sum_{j=1}^{l_r^w} a_{rj}, \quad b_r^w = \sum_{j=1}^{l_r^w} b_{rj}, \quad h_r^w = \sum_{j=1}^{l_r^w} b_{rj}h_{rj}^w.$$

В таком случае (16) примет вид

$$a_r^w + b_r^w f_r^w + h_r^w \begin{cases} = \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w > 0, \\ \geqslant \mathfrak{t}^w & \text{при } f_r^w = 0, \end{cases} \qquad \forall r \in R^w,\ w \in W,$$

откуда имеем

$$f_r^w = \begin{cases} \frac{\mathfrak{t}^w - a_r^w - h_r^w}{b_r^w} & \text{при } a_r^w + h_r^w < \mathfrak{t}^w, \\ 0 & \text{при } a_r^w + h_r^w \geqslant \mathfrak{t}^w, \end{cases} \qquad \forall r \in R^w,\ w \in W. \tag{17}$$

Без умаления общности, будем считать, что маршруты между каждой парой $w \in W$ упорядочены таким образом, что

$$a_1^w + h_1^w \leqslant \ldots \leqslant a_{|R^w|}^w + h_{|R^w|}^w.$$

Определим маршрут r^w такой, что

$$a_{r^w}^w + h_{r^w}^w < \mathfrak{t}^w \leqslant a_{r^w+1}^w + h_{r^w+1}^w. \tag{18}$$

В этом случае, согласно (17), имеем

$$\sum_{r\in R^w} f_r^w = \sum_{r=1}^{r^w} f_r^w = \sum_{r=1}^{r^w} \frac{\mathfrak{t}^w - a_r^w - h_r^w}{b_r^w} = F^w,$$

откуда находим, что

$$\mathfrak{t}^w = \frac{F^w + \sum_{s=1}^{r^w} \frac{a_s^w + h_s^w}{b_s^w}}{\sum_{s=1}^{r^w} \frac{1}{b_s^w}}.$$

Согласно (18), получаем

$$a_{r^w}^w + h_{r^w}^w < \frac{F^w + \sum_{s=1}^{r^w} \frac{a_s^w + h_s^w}{b_s^w}}{\sum_{s=1}^{r^w} \frac{1}{b_s^w}} \leqslant a_{r^w+1}^w + h_{r^w+1}^w$$

или

$$\sum_{r=1}^{r^w} \frac{a_{r^w}^w + h_{r^w}^w - a_r^w - h_r^w}{b_r^w} \leqslant F^w < \sum_{r=1}^{r^w} \frac{a_{r^w+1}^w + h_{r^w+1}^w - a_r^w - h_r^w}{b_r^w}.$$

Таким образом, в силу того, что условия Куна—Таккера являются необходимыми и достаточными, приходим к следующему: оптимизационная задача (1)–(4) эквивалентна СЛАУ и набору неравенств

$$f_r^w = \frac{F^w + \sum_{s=1}^{r^w} \frac{a_s^w + h_s^w}{b_s^w}}{b_r^w \sum_{s=1}^{r^w} \frac{1}{b_s^w}} - \frac{a_r^w + h_r^w}{b_r^w}, \quad r \leqslant r^w, \quad \forall\, w \in W,$$

$$f_r^w = 0, \quad r^w < r \leqslant |R^w|, \quad \forall\, w \in W,$$

где r^w определяется из условий

$$\sum_{r=1}^{r^w} \frac{a_{r^w}^w + h_{r^w}^w - a_r^w - h_r^w}{b_r^w} \leqslant F^w < \sum_{r=1}^{r^w} \frac{a_{r^w+1}^w + h_{r^w+1}^w - a_r - h_r}{b_r}, \quad \forall\, w \in W,$$

при

$$a_1^w + h_1^w \leqslant \ldots \leqslant a_{|R^w|}^w + h_{|R^w|}^w, \quad \forall\, w \in W,$$

с

$$a_r^w = \sum_{j=1}^{l_r^w} a_{rj}^w, \quad b_r^w = \sum_{j=1}^{l_r^w} b_{rj}^w, \quad h_r^w = \sum_{j=1}^{l_r^w} b_{rj}^w h_{rj}^w, \quad \forall\, r \in R^w,\ w \in W.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы конструктивно в том смысле, что предлагает метод сведения задачи распределения потоков к СЛАУ относительно переменных потоков по маршрутам. Алгоритм конкретных действий по сведению задачи распределения потоков к СЛАУ может быть следующим:

1) для каждой пары районов отправления—прибытия $w \in W$ формируем систему из уравнений

$$f_r^w = \frac{F^w + \sum_{s=1}^{r^w} \frac{a_s^w + h_s^w}{b_s^w}}{b_r^w \sum_{s=1}^{r^w} \frac{1}{b_s^w}} - \frac{a_r^w + h_r^w}{b_r^w}$$

для всех используемых маршрутов $r \in R^w$;

2) объединяем получившиеся СЛАУ в одну общую систему, имея в виду, что $h^w_{rj} = \sum_{\nu \in W} \sum_{p \in R^\nu \setminus r} f^\nu_p \delta^\nu_{j,p}$, для всех $j \in r,\ r \in R^w,\ w \in W$;

3) решаем общую СЛАУ.

4. Пример решения задачи распределения потоков по маршрутам транспортной сети посредством решения СЛАУ. Рассмотрим сеть, представленную на рисунке, с характеристиками, введенными в табл. 1.

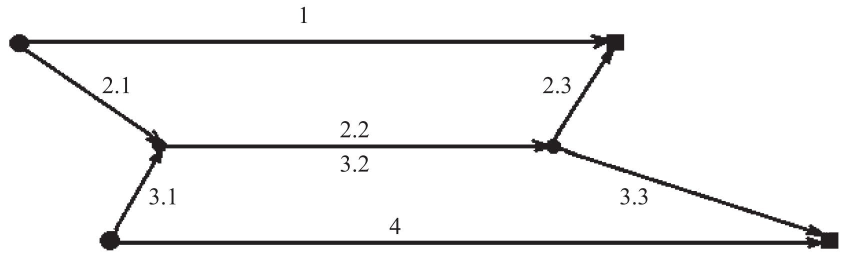

Рисунок. Транспортная сеть

Таблица 1. **Характеристики маршрутов**

i	Маршрут 1		Маршрут 2		Маршрут 3		Маршрут 4	
	a_i	b_i	a_{2i}	b_{2i}	a_{3i}	b_{3i}	a_i	b_i
1	4	0.5	2	0.2	1.5	0.15	5	0.4
2			1.5	0.15	1.5	0.15		
3			1.5	0.2	1	0.2		

Предполагается, что рассматриваемый граф ориентированный, имеет два истока (круги) и два стока (квадраты). Каждая пара исток—сток соединена двумя маршрутами: первая пара — маршрутами 1 и 2, а вторая — 3 и 4. В свою очередь, маршрут 1 состоит из одной дуги, маршрут 2 — из дуг 2.1, 2.2 и 2.3, маршрут 3 — из дуг 3.1, 3.2 и 3.3, маршрут 4 — из одной дуги. При этом заметим, что 2.2 и 3.2 — это одна и та же дуга.

Тем не менее необходимо, чтобы все дуги каждого отдельно взятого маршрута были пронумерованы. Таким образом, получаем две задачи распределения транспортного потока по двум подсетям с параллельными маршрутами. При этом $F_1 = 20$ и $F_2 = 30$. Тогда, благодаря (8), окончательно определяем характеристики для каждого маршрута (табл. 2).

Таблица 2. **Характеристики маршрутов**

Параметр	Маршрут 1	Маршрут 2	Маршрут 3	Маршрут 4
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
a_i	4	5	4	5
b_i	0.5	0.55	0.5	0.4
h_i	0	$0.15 \cdot f_3$	$0.15 \cdot f_2$	0

Применив (10), получаем СЛАУ

$$f_1 = \frac{20 + \frac{4}{0.5} + \frac{5+0.15 f_3}{0.55}}{0.5\left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.55}\right)} - \frac{4}{0.5},$$

$$f_2 = \frac{20 + \frac{4}{0.5} + \frac{5+0.15f_3}{0.55}}{0.55\left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.55}\right)} - \frac{5 + 0.15f_3}{0.55},$$

$$f_3 = \frac{30 + \frac{4+0.15f_2}{0.5} + \frac{5}{0.4}}{0.5\left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.4}\right)} - \frac{4 + 0.15f_2}{0.5},$$

$$f_4 = \frac{30 + \frac{4+0.15f_2}{0.5} + \frac{5}{0.4}}{0.4\left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.4}\right)} - \frac{5}{0.4}.$$

Преобразовав ее, приходим к СЛАУ в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.14 & 0 \\ 0 & 1 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0.17 & 1 & 0 \\ 0 & -0.17 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.42 \\ 8.57 \\ 14.44 \\ 15.55 \end{pmatrix},$$

откуда окончательно определяем значения потоков по маршрутам как решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.3 \\ 6.7 \\ 13.3 \\ 16.7 \end{pmatrix}.$$

В качестве проверки можно подставить эти величины в функции задержки и увидеть, что $t_1(f_1) = t_2(f_2) = 10.7$ и $t_3(f_3) = t_4(f_4) = 11.7$. Таким образом, все маршруты являются используемыми и дополнительной проверки выполнения условий в виде неравенств не требуется.

5. Заключение. Была рассмотрена задача распределения потоков по маршрутам линейной транспортной сети, которая представлялась ориентированным графом произвольной топологии. Задача распределения транспортных потоков по маршрутам была поставлена как задача условной нелинейной оптимизации. Была доказана теорема о сводимости задачи распределения потоков по маршрутам линейной транспортной сети к СЛАУ и набора условий в виде неравенств. Приведен пример использования конструктивного доказательства теоремы сведения задачи распределения потоков по маршрутам транспортной сети к СЛАУ.

Литература

1. *Wardrop J. G.* Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Institution of Civil Engineers. 1952. Vol. 2. P. 325–378.

2. *Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B.* Studies in the economics of transportation. New Haven, CT: Yale University Press, 1956. 359 p.

3. *Sheffi Y.* Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. New Jersey: Prentice-Hall Inc.; Englewood Cliffs, 1985. 416 p.

4. *Yang H., Huang H.-J.* The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem // Transportation Research. Pt B: Methodological. 2004. Vol. 38. P. 1–15.

5. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. В. А. Дружининой, И. А. Волковой. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2010. 360 с.

6. *Di X., Liu H. X.* Boundedly rational route choice behavior: A review of models and methodologies // Transportation Research. Pt B: Methodological. 2016. Vol. 85. P. 142–179.

7. *Шелейховский Г. В.* Транспортные основания композиции городского плана. Л.: Гипрогор, 1936. 150 с.

8. *Брегман Л. М.* Доказательство сходимости метода Г. В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 147–156.

9. *Wilson A. G.* Entropy in urban and regional modelling. London: Pion, 1970. 166 p.

10. *Федоров В. П., Лосин Л. А.* Методы математического моделирования для проектирования городской транспортной системы на досетевом уровне // Транспорт Российской Федерации. 2012. № 2(39). С. 30–33.

11. *Федоров В. П.* Формирование вариантов развития городских транспортных сетей: разработка метода // Транспорт Российской Федерации. 2012. № 3–4(40–41). С. 17–21.

12. *Patriksson M.* A mixed user-equilibrium and system-optimal traffic flow for connected vehicles stated as a complementarity problem // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 2017. Vol. 32(7). P. 562–580.

13. *Konnov I. V.* On auction equilibrium models with network applications // Netnomics. 2015. Vol. 16. P. 107–125.

14. *Konnov I. V.* Vector network equilibrium problems with elastic demands // Journal of Global Optimization. 2013. Vol. 57. P. 521–531.

15. *Mazalov V. V., Melnik A. V.* Equilibrium prices and flows in the passenger traffic problem // International Game Theory Review. 2016. Vol. 18(1). (URL: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219198916500018; дата обращения: 04.04.2018 г.)

16. *Lien J. W., Mazalov V. V., Melnik A. V., Zheng J.* Wardrop equilibrium for networks with the BPR latency function // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2016. Vol. 9869. P. 37–49.

17. *Krylatov A. Yu.* Network flow assignment as a fixed point problem // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2016. Vol. 10(2). P. 243–256.

18. *Krylatov A. Yu., Shirokolobova A. P.* Projection approach versus gradient descent for network's flows assignment problem // Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10556. P. 345–350.

19. *Zakharov V. V., Krylatov A. Yu.* Competitive routing of traffic flows by navigation providers // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, N 1. P. 179–189.

20. *Krylatov A. Y., Zakharov V. V., Malygin I. G.* Competitive traffic assignment in Road Networks // Transport and Telecommunication. 2016. Vol. 17, N 3. P. 212–221.

21. *Patriksson M.* The traffic assignment problem: models and methods. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1994. 223 p.

22. *Крылатов А. Ю.* Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 2. С. 121–130.

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 6 октября 2017 г.; принята к печати 15 марта 2018 г.

Контактная информация:

Крылатов Александр Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; a.krylatov@spbu.ru

Широколобова Анастасия Павловна — ассистент; a.shirokolobova@spbu.ru

Equilibrium route flow assignment in linear network as a system of linear equations

A. Yu. Krylatov[1,2], *A. P. Shirokolobova*[1]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

[2] Solomenko Institute of Transport Problems, 13, 12th line of V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Krylatov A. Yu., Shirokolobova A. P. Equilibrium route flow assignment in linear network as a system of linear equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 103–115. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.203

Decision making requires possibilities to influence the object. In urban traffic area it is crucial to influence traffic flows. However, first of all, decision maker needs comprehensive information about traffic flows. From a practical perspective, the most valuable is information about route flows, unlike information about link flows. In this paper, a route flow traffic assignment model in a linear network is studied. Linear road network (linear link performance function) gives a chance to reduce traffic assignment problem to a system of linear equations and conditions in the form of linear inequalities. The directed graph represents road network. Route flow traffic assignment problem is presented as a nonlinear constrained problem. The theorem about the reduction of a route flow traffic assignment problem in linear road network to the system of linear equations is proved. Implementation of developed approach to an example of the linear road network is disassembled in details.

Keywords: constrained nonlinear optimization, user equilibrium of Wardrop, route flow traffic assignment.

References

1. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proc. Institution of Civil Engineers*, 1952, vol. 2, pp. 325–378.

2. Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B. *Studies in the economics of transportation.* New Haven, CT, Yale University Press, 1956, 359 p.

3. Sheffi Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. New Jersey, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs Publ., 1985, 416 p.

4. Yang H., Huang H.-J. The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem. *Transportation Research*, *pt B. Methodological*, 2004, vol. 38, pp. 1–15.

5. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnyh potokov* [*Introduction to mathematical modelling of traffic flows*]. Pod red. V. A. Druzhininoj, I. A. Volkovoj. Moscow, Moscow phys. and techn. University Publ., 2010, 360 p. (In Russian)

6. Di X., Liu H. X. Boundedly rational route choice behavior: A review of models and methodologies. *Transportation Research, pt B. Methodological*, 2016, vol. 85, pp. 142–179.

7. Sheleykhovskiy G. V. *Transportnye osnovaniya kompozictsii gorodskogo plana* [*Transportation basis for urban planning*]. Leningrad, Giprogor Publ., 1936, 150 p. (In Russian)

8. Bregman L. M. Dokazatel'stvo skhodimosti metoda G. V. Sheleykhovskiy dlya zadachi s transportnymi ogranicheniyami [The proof of convergence of the Sheleykhovskiy's method for the problem with transportation constraints]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, no. 1, pp. 147–156. (In Russian)

9. Wilson A. G. *Entropy in urban and regional modelling.* London, Pion Press, 1970, 166 p.

10. Fedorov V. P., Losin L. A. Metody matematicheskogo modelirovaniya dlya proektirovaniya gorodskoy transportnoy sistemy na dosetevom urovne [Mathematical modelling methods in designing urban transport system on pre-network level]. *Transport of Russian Federation*, 2012, no. 2(39), pp. 30–33. (In Russian)

11. Fedorov V. P. Formirovanie variantov razvitiya gorodskikh transportnykh setey: razrabotka metoda [Working out the method for forming variations for development of urban transport networks]. *Transport of Russian Federation*, 2012, no. 3–4(40–41), pp. 17–21. (In Russian)

12. Patriksson M. A mixed user-equilibrium and system-optimal traffic flow for connected vehicles stated as a complementarity problem. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2017, vol. 32(7), pp. 562–580.

13. Konnov I. V. On auction equilibrium models with network applications. *Netnomics*, 2015, vol. 16, pp. 107–125.

14. Konnov I. V. Vector network equilibrium problems with elastic demands. *Journal of Global Optimization*, 2013, vol. 57, pp. 521–531.

15. Mazalov V. V., Melnik A. V. Equilibrium prices and flows in the passenger traffic problem. *International Game Theory Review*, 2016, vol. 18(1). (Available at: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219198916500018; accessed: 04.04.2018)

16. Lien J. W., Mazalov V. V., Melnik A. V., Zheng J. Wardrop equilibrium for networks with the BPR latency function. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2016, vol. 9869, pp. 37–49.

17. Krylatov A.Yu. Network flow assignment as a fixed point problem. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10(2), pp. 243–256.

18. Krylatov A. Yu., Shirokolobova A. P. Projection approach versus gradient descent for network's flows assignment problem. *Lecture Notes in Computer Science*, 2017, vol. 10556, pp. 345–350.

19. Zakharov V. V., Krylatov A. Yu. Competitive routing of traffic flows by navigation providers. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 1, pp. 179–189.

20. Krylatov A. Y., Zakharov V. V., Malygin I. G. Competitive traffic assignment in Road Networks. *Transport and Telecommunication*, 2016, vol. 17, no. 3, pp. 212–221.
21. Patriksson M. The traffic assignment problem: models and methods. Utrecht, The Netherlands, VSP Press, 1994, 223 p.
22. Krylatov A. Yu. Optimalnye strategii upravleniya transportnymi potokami na seti iz parallelnyh kanalov [Optimal strategies for traffic flow management on the transportation network of parallel links]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, iss. 2, pp. 121–130. (In Russian)

Author's Information:

Krylatov Alexander Yu. — PhD Sci. in physics and mathematics, associate professor; a.krylatov@spbu.ru

Shirokolobova Anastasiya P. — assistant; a.shirokolobova@spbu.ru