

Математическое моделирование больших деформаций композитной плоскости с межфазной трещиной для полулинейного материала*

Т. О. Доманская, В. М. Мальков, Ю. В. Малькова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Математическое моделирование больших деформаций композитной плоскости с межфазной трещиной для полулинейного материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 89–102. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.202>

Получены аналитические решения нелинейных задач (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для неоднородной плоскости с межфазной трещиной. Плоскость образована соединением двух полуплоскостей, механические свойства которых описываются моделью полулинейного материала. Применение этой модели позволило использовать методы теории функций комплексной переменной для решения нелинейных задач. Для плоскости со свободной межфазной трещиной при заданных постоянных напряжениях на бесконечности выведены формулы для номинальных напряжений, напряжений Коши и перемещений. Из общих выражений построены асимптотики указанных функций в окрестностях концов трещины. Найдены коэффициенты интенсивности номинальных напряжений. В задаче растяжения плоскости со свободной трещиной установлено, что формулы, дающие раскрытие трещины, отличаются постоянным множителем от определенных по уравнениям линейной теории упругости. Коэффициенты интенсивности номинальных напряжений нелинейной и линейной задач совпадают. Номинальные напряжения имеют корневую особенность у концов трещины, у истинных напряжений Коши ее нет.

Ключевые слова: неоднородная плоскость, плоская деформация, плоское напряженное состояние, метод комплексных функций, межфазная трещина, полулинейный материал.

Введение. Используемая в работе модель нелинейно упругого материала предложена Ф. Джоном [1]. Этот материал относится к классу гармонических, что позволяет при решении плоских задач нелинейной упругости применить методы комплексных функций. А. И. Лурье назвал материал полулинейным [2], его модель рассматривалась рядом авторов (см., например, [2–7] и др.). Комплексная формулировка уравнений нелинейной плоской задачи и методы решения были предложены в работах [5–7], где получены важные результаты для композитной плоскости при действии сосредоточенной силы на межфазной линии и на границе полуплоскости, а также для плоскости с межфазной трещиной. Для указанных задач в [7] проведено сравнение напряжений композитной плоскости для двух моделей гармонических материалов — полулинейного и Джона. Модель гармонического материала Джона достаточно часто использовалась многими авторами. Например, в работах [8–16] решены задачи для плоскости с эллиптическим отверстием или включением, для неоднородной плоскости с межфазной трещиной и др. В задаче об эллиптическом включении установлено, что

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00065).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

номинальные напряжения и напряжения Коши постоянны в области включения, если на бесконечности заданы постоянные напряжения. Показано, что при одноосном или двuosном сжатии плоскости материал включения может терять устойчивость [12, 13]. Построены точные решения ряда задач о межфазной трещине и сосредоточенных силах на линии раздела материалов неоднородной плоскости. Исследование задачи о межфазной трещине для случая равномерного давления на берегах показало, что существуют некоторые критические давления, превышение которых ведет к потере устойчивости материала и большим закритическим деформациям [14].

Следует отметить, что в литературе мало работ, посвященных решению задач о межфазных трещинах на основе полностью нелинейных уравнений теории упругости, и полученные в настоящей статье результаты имеют важное значение для теории и приложений. В частности, совпадение формул для раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности напряжений в нелинейной и линейной задачах о межфазной трещине несомненно заинтересует специалистов, занимающихся вопросами прочности и разрушения композитных материалов.

Общие соотношения. Для решения задачи о межфазной трещине в неоднородной плоскости будем использовать уравнения плоской деформации для модели полуплоскостного материала, представленные в работах [5, 6].

Рассмотрим уравнения равновесия (при отсутствии объемных сил) для тензора номинальных напряжений $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ и уравнения совместности для градиента деформации $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{G}^T = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Запишем уравнения (1) для плоских задач в комплексной форме

$$\begin{aligned} (s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 &= 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) штрих и индекс внизу обозначают частные производные по декартовым координатам (x_1, x_2) отсчетной конфигурации. Уравнения равновесия и уравнения совместности для обеих плоских задач являются точными, поскольку напряжения $s_{31} = s_{32} = 0$ для полуплоскостного материала.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ и комплексную функцию номинальных напряжений $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Функция ζ представляет текущие координаты точки, физический смысл функции σ ясен из соотношения

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 = i \int (s_{n1} + is_{n2}) ds + \text{const},$$

в котором σ_1, σ_2 — проекции на оси координат главного вектора сил на дуге s .

Уравнения (2) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Комплексные функции $\zeta(z, \bar{z})$ и $\sigma(z, \bar{z})$ находятся с помощью соотношений упругости и граничных условий задачи.

Полулинейный материал. Модель полулинейного материала позволяет рассматривать обе плоские задачи — плоскую деформацию и плоское напряженное состояние. Упругий потенциал (удельная энергия деформации) и закон упругости для полулинейного материала имеют вид [17]

$$\Phi = 0,5\lambda \text{tr}^2(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) + \mu \text{tr}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I})^2,$$

$$\mathbf{S} = 2\mu \mathbf{G}^T + \varkappa \mathbf{Q}^T, \quad \varkappa = \lambda(\text{tr} \mathbf{\Lambda} - 3) - 2\mu,$$

здесь λ, μ — параметры Ляме, $\mathbf{\Lambda}$ — тензор кратностей удлинений, \mathbf{Q} — ортогональный тензор. Эти тензоры участвуют в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$. В случае плоской задачи

$$\mathbf{Q} = \cos \omega (\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}) - \sin \omega (\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21}) + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,$$

ω — угол поворота главных осей в результате деформации.

Представим закон упругости для компонент тензора номинальных напряжений плоской задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{11} + i s_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + i g_{21}) + \lambda(g_{22} - i g_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - i s_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - i g_{12}) + \lambda(g_{11} + i g_{21}) + k e^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu \lambda_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$, λ_3 — кратность удлинения в поперечном направлении. Из (3) выводим соотношение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega},$$

в котором

$$e^{i\omega} = \frac{g_{11} + g_{22} + i(g_{21} - i g_{12})}{\sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 + (g_{21} - g_{12})^2}}.$$

Подставив в первое и второе соотношения (4) выражения (3), получим систему уравнений для функций $\sigma(z, \bar{z})$ и $\zeta(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (5)$$

Константа c различна для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Для указанных задач соответственно [5] имеем

$$c = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad c = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

где ν — коэффициент Пуассона. Уравнения (5) решены в [5, 6]:

$$\begin{aligned} 2\mu \zeta &= \frac{1}{1 + c} \left[\varphi(z) - \overline{\psi(z)} + 2\mu c \int e^{i\omega} dz \right], \\ \sigma &= \frac{1}{1 + c} \left[c\varphi(z) + \overline{\psi(z)} - 2\mu c \int e^{i\omega} dz \right], \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $\varphi(z), \psi(z)$ — аналитические функции комплексной переменной z ,

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}}.$$

Аналогичная (6) формула для функции $e^{i\omega}$ есть в работе А. И. Лурье [2], основными искомыми функциями для полуплоскостного материала в [2] являются ζ и $\varphi(z)$. Задача о межфазной трещине А. И. Лурье не рассматривалась.

Введем вспомогательную функцию $\Omega(z)$, что позволит упростить уравнения граничных задач и их решение:

$$\Omega(z) = \overline{\psi'(\bar{z})} + q(z),$$

$$q(z) = -2\mu c \left(\sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}} - \frac{1}{2} \frac{\overline{\varphi''(z)}}{(\overline{\varphi'(z)})^{3/2}} \int \sqrt{\overline{\varphi'(z)}} dz \right).$$

Номинальные напряжения и деформации на линии сопряжения полуплоскостей находятся по формулам

$$s_{11} + is_{12} = \frac{1}{1+c} \left[c\varphi'(z) - \Omega(\bar{z}) - 4\mu c \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} \right],$$

$$s_{22} - is_{21} = \frac{1}{1+c} [c\varphi'(z) + \Omega(\bar{z})],$$

$$2\mu(g_{22} - ig_{12}) = \varphi'(z) - (s_{11} + is_{12}),$$

$$2\mu(g_{11} + ig_{21}) = \varphi'(z) - (s_{22} - is_{21}).$$
(7)

Задача о межфазной трещине. Рассмотрим неоднородную плоскость с межфазной трещиной, которая расположена на промежутке $[-a, a]$ линии сопряжения полуплоскостей (рис. 1). На бесконечности (в пределе при $|z| \rightarrow \infty$) заданы напряжения $s_{ij} \rightarrow s_{ij}^\infty$ (свои для каждой полуплоскости). Берега трещины свободны:

$$(s_{22} - is_{21})^+ = 0, \quad (s_{22} - is_{21})^- = 0, \quad |x_1| < a. \quad (8)$$

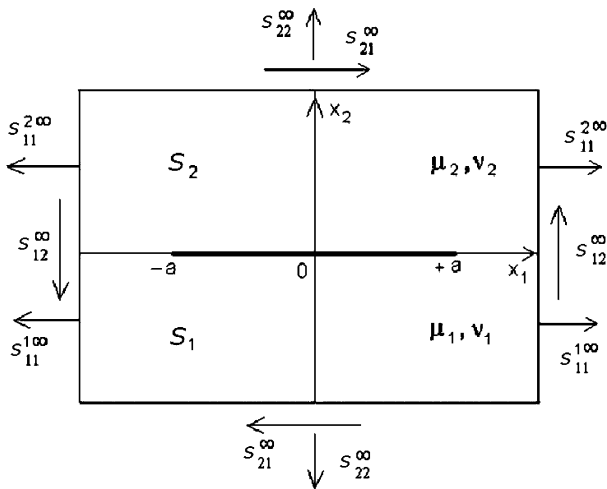


Рис. 1. Неоднородная плоскость с межфазной трещиной

Введем две комплексные функции, аналитические во всей плоскости, кроме линии раздела материалов:

$$h(z) = \frac{c_2}{1+c_2}\varphi_2'(z) - \frac{1}{1+c_1}\Omega_1(z), \quad z \in S_2,$$

$$r(z) = \frac{1}{2\mu_2}\frac{1}{1+c_2}\varphi'(z) + \frac{1}{2\mu_1}\frac{1}{1+c_1}\Omega_1(z), \quad z \in S_2.$$

Для нижней полуплоскости S_1 комплексные функции $h(z)$ и $r(z)$ получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

Граничные условия (8) приводят к системе уравнений Римана—Гильберта [18] для функций $h(z)$ и $r(z)$:

$$h^+(t) - h^-(t) = 0, \quad r^+(t) + \delta r^-(t) = 0, \quad t \in (-a, a), \quad (9)$$

$$\delta = \frac{c_1(\mu_1 + \mu_2 c_2)}{c_2(\mu_2 + \mu_1 c_1)}.$$

Решение уравнений (9) таково:

$$h(z) = h(\infty), \quad (r - Dh)(z) = AX(z)(z - 2i\beta a),$$

где

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln \delta}{2\pi},$$

$$A = \frac{1}{2\mu_1\mu_2} \frac{(\mu_1 + \mu_2 c_2)(\mu_2 + \mu_1 c_1)}{c_1(\mu_1 + \mu_2 c_2) + c_2(\mu_2 + \mu_1 c_1)} (s_{22}^\infty - i s_{21}^\infty),$$

$$D = \frac{1 - c_1 c_2}{2(c_1(\mu_1 + \mu_2 c_2) + c_2(\mu_2 + \mu_1 c_1))}.$$

Если параметр $\delta \neq 1$, то функция $X(z)$ содержит осциллирующие слагаемые. Постоянная $h(\infty)$ находится через напряжения на бесконечности по формуле

$$h(\infty) = \frac{2\mu_1 c_1}{1+c_1} w_1 + \frac{2\mu_2 c_2}{1+c_2} w_2 + (s_{11}^\infty + i s_{12}^\infty),$$

в которой

$$w = e^{i\omega(\infty)} = \frac{g_{11}^\infty + i g_{21}^\infty + g_{22}^\infty - i g_{12}^\infty}{\sqrt{(g_{11}^\infty + g_{22}^\infty)^2 + (g_{21}^\infty - g_{12}^\infty)^2}}.$$

По формулам (7) с учетом (5) найдем точные значения номинальных напряжений для верхней полуплоскости S_2 при плоской деформации

$$s_{11} + i s_{12} = \frac{2\mu_2(1 - \nu_1)h(\infty)}{\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 - \nu_1)} + \frac{2\mu_1\mu_2 A}{\mu_1(1 - 2\nu_2) + \mu_2} X(z)(z - 2i\beta a) -$$

$$- \frac{2\mu_1\mu_2 A}{\mu_2(1 - 2\nu_1) + \mu_1} X(\bar{z})(\bar{z} - 2i\beta a) - \frac{2\mu_2}{1 - \nu_2} \sqrt{\frac{h(\infty)(1 + 2\mu_1 D) + AX(z)(z - 2i\beta a)}{h(\infty)(1 + 2\mu_1 D) + \overline{AX}(\bar{z})(\bar{z} + 2i\beta a)}},$$

$$s_{22} - i s_{21} = \frac{2\mu_1\mu_2 A}{\mu_1(1 - 2\nu_2) + \mu_2} X(z)(z - 2i\beta a) + \frac{2\mu_1\mu_2 A}{\mu_2(1 - 2\nu_1) + \mu_1} X(\bar{z})(\bar{z} - 2i\beta a),$$

$$A = \frac{[\mu_1(1 - 2\nu_2) + \mu_2][\mu_2(1 - 2\nu_1) + \mu_1]}{4\mu_1\mu_2[\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 - \nu_1)]} (s_{22}^\infty - i s_{21}^\infty)$$

и плоском напряженном состоянии

$$s_{11} + is_{12} = \frac{2\mu_2(1 + \nu_2)h(\infty)}{\mu_2(1 + \nu_2) + \mu_1(1 + \nu_1)} + \frac{2\mu_1\mu_2(1 + \nu_2)A}{\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 + \nu_2)}X(z)(z - 2i\beta a) -$$

$$- \frac{2\mu_1\mu_2(1 + \nu_1)A}{\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 + \nu_1)}X(\bar{z})(\bar{z} - 2i\beta a) - 2\mu_2(1 + \nu_2)\sqrt{\frac{h(\infty)(1 + 2\mu_1 D) + AX(z)(z - 2i\beta a)}{h(\infty)X(z)(\bar{z} + 2i\beta a)}},$$

$$s_{22} - is_{21} = \frac{2\mu_1\mu_2(1 + \nu_2)A}{\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 + \nu_2)}X(z)(z - 2i\beta a) + \frac{2\mu_1\mu_2(1 + \nu_1)A}{\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 + \nu_1)}X(\bar{z})(\bar{z} - 2i\beta a),$$

$$A = \frac{[\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 + \nu_2)][\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 + \nu_1)]}{4\mu_1\mu_2[\mu_2(1 + \nu_2) + \mu_1(1 + \nu_1)]}(s_{22}^\infty - is_{21}^\infty).$$

Напряжения для нижней полуплоскости S_1 получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

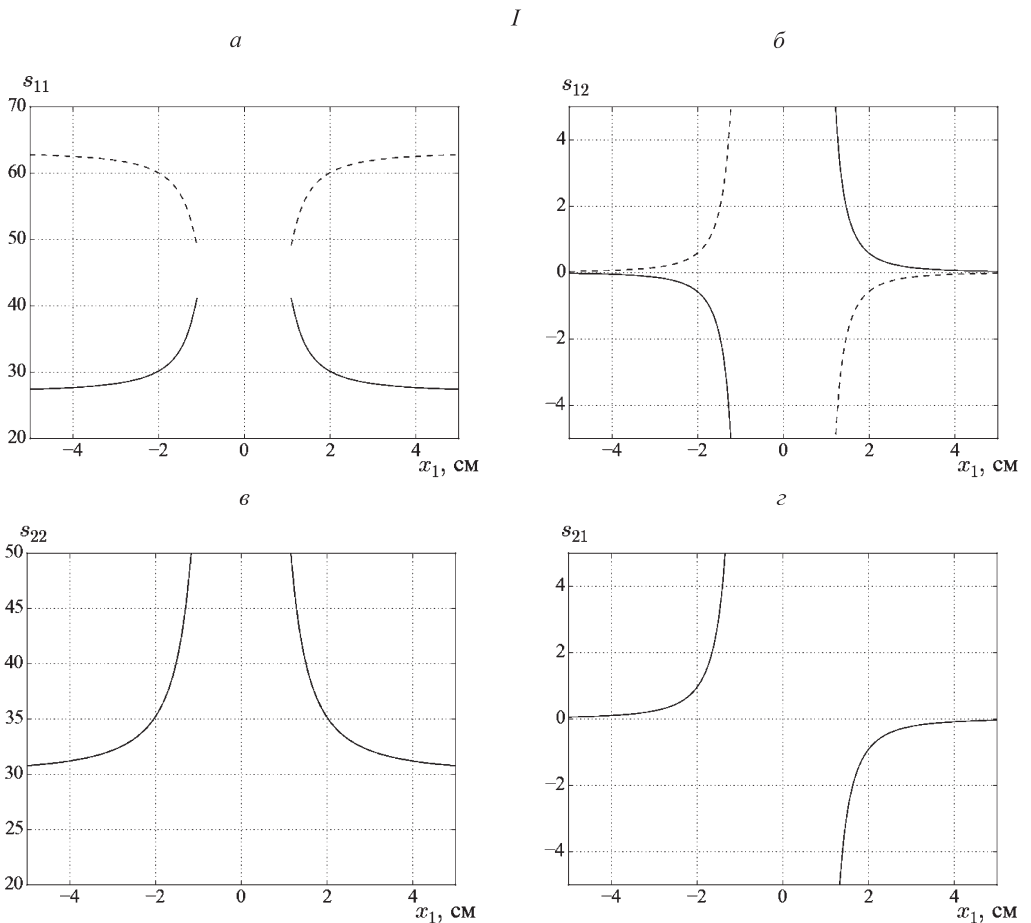


Рис. 2. Номинальные напряжения s_{ij} при плоской деформации (I) и плоском напряженном состоянии в нижней полуплоскости

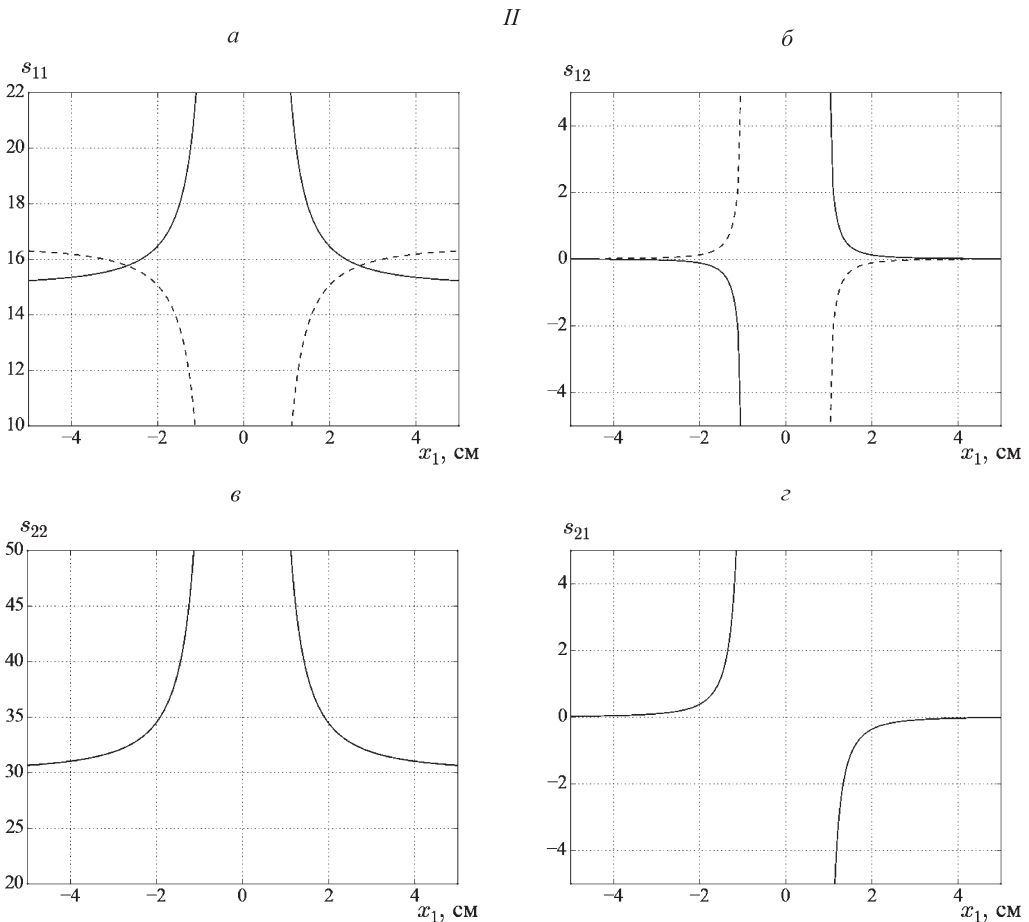
Были выполнены расчеты номинальных напряжений на межфазной линии для верхней и нижней полуплоскостей (S_1 и S_2) в окрестностях концов трещины при плоской деформации и плоском напряженном состоянии. На рис. 2 приведены напряжения s_{11} (а), s_{12} (б), s_{22} (в) и s_{21} (г) (кг/см²) для нагрузки $s_{22}^\infty = 30$ кг/см² как функции от x_1 при плоской деформации (I) и плоском напряженном состоянии (II).

Параметры системы: $\mu_1 = 10$ кг/см², $\mu_2 = 50$ кг/см², $\nu_1 = 0.48$, $\nu_2 = 0.45$, $s_{21}^\infty = 0$, $a \in [-1, 1]$.

По графикам рис. 2 можно определить, что при плоской деформации и плоском напряженном состоянии напряжения s_{22} и s_{21} для верхней и нижней полуплоскостей совпадают, а напряжения s_{11} и s_{12} различаются. В окрестности концов трещины наблюдается скачок напряжений.

Скачок перемещений берегов трещины вычисляется по формуле

$$\Delta(u_1 + iu_2)(t) = \frac{1}{2\mu_2} \left[\varphi_2(t) \right]^+ - \frac{1}{2\mu_1} \left[\varphi_1(t) \right]^-.$$



напряженном состоянии (II) для верхней полуплоскости S_2 (пунктирная линия) S_1 (сплошная линия)

Найдем скачок перемещений для плоской деформации

$$\Delta(u_1 + iu_2)(z) = h(\infty) \left(\frac{(1 - \nu_2)(1 + 2\mu_1 D)}{\mu_1(1 - 2\nu_2) + \mu_2} - \frac{(1 - \nu_1)(1 + 2\mu_2 D)}{\mu_2(1 - 2\nu_1) + \mu_1} \right) z + \\ + \frac{i(s_{22}^\infty - is_{21}^\infty)}{2\mu_1\mu_2} \sqrt{(\mu_1 + \mu_2 - 2\nu_1\mu_2)(\mu_2 + \mu_1 - 2\nu_2\mu_1)} \sqrt{a^2 - z^2} \left(\frac{a+z}{a-z} \right)^{i\beta}$$

и плоского напряженного состояния

$$\Delta(u_1 + iu_2)(z) = h(\infty) \left(\frac{1 + 2\mu_1 D}{\mu_2(1 + \nu_2) + \mu_1(1 - \nu_2)} - \frac{1 + 2\mu_2 D}{\mu_1(1 + \nu_1) + \mu_2(1 - \nu_1)} \right) z + \\ + \frac{i(s_{22}^\infty - is_{21}^\infty) \sqrt{(\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 + \nu_2))(\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 + \nu_1))}}{2\mu_1\mu_2 \sqrt{(1 + \nu_2)(1 + \nu_1)}} \sqrt{a^2 - z^2} \left(\frac{a+z}{a-z} \right)^{i\beta}.$$

Рассмотрим случай одноосного растяжения плоскости напряжениями s_{22}^∞ . Касательные напряжения на бесконечности равны нулю. Для плоской деформации определим вертикальные перемещения верхнего и нижнего берегов трещины по формулам

$$u_2^+(t) = \\ = \frac{s_{22}^\infty(1 - \nu_2)\sqrt{1 - t^2}}{2\mu_2[\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 - \nu_1)]} \sqrt{(\mu_1 + \mu_2 - 2\nu_1\mu_2)(\mu_2 + \mu_1 - 2\nu_2\mu_1)} \cos \left[\beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right],$$

$$u_2^-(t) = \\ = \frac{-s_{22}^\infty(1 - \nu_1)\sqrt{1 - t^2}}{2\mu_1[\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 - \nu_1)]} \sqrt{(\mu_1 + \mu_2 - 2\nu_1\mu_2)(\mu_2 + \mu_1 - 2\nu_2\mu_1)} \cos \left[\beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right],$$

скачок перемещений

$$\Delta u_2(t) = \frac{s_{22}^\infty \sqrt{1 - t^2}}{2\mu_1\mu_2} \sqrt{(\mu_1 + \mu_2 - 2\nu_1\mu_2)(\mu_2 + \mu_1 - 2\nu_2\mu_1)} \cos \left[\beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right].$$

Для плоского напряженного состояния найдем вертикальные перемещения верхнего и нижнего берегов трещины

$$u_2^+(t) = \\ = \frac{s_{22}^\infty \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 + \nu_1} \sqrt{(\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 + \nu_2))(\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 + \nu_1))}}{2\mu_2[\mu_2(1 + \nu_2) + \mu_1(1 + \nu_1)] \sqrt{1 + \nu_2}} \cos \left[\beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right],$$

$$u_2^-(t) = \\ = \frac{-s_{22}^\infty \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 + \nu_2} \sqrt{(\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 + \nu_2))(\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 + \nu_1))}}{2\mu_1[\mu_2(1 + \nu_2) + \mu_1(1 + \nu_1)] \sqrt{1 + \nu_1}} \cos \left[\beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right],$$

скачок перемещений

$$\Delta u_2(t) = \frac{s_{22}^\infty \sqrt{1 - t^2}}{2\mu_1\mu_2} \sqrt{\frac{(\mu_1 + \mu_2 - \nu_1(\mu_2 - \mu_1))(\mu_2 + \mu_1 - \nu_2(\mu_1 - \mu_2))}{(1 + \nu_1)(1 + \nu_2)}} \cos \left[\beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right].$$

Аналогичная линейная задача о трещине в неоднородной плоскости решена в работе [18]. Оказалось, что формулы для скачка перемещений берегов трещины $\Delta u_2(z)$ нелинейной и линейной задач отличаются лишь постоянным множителем.

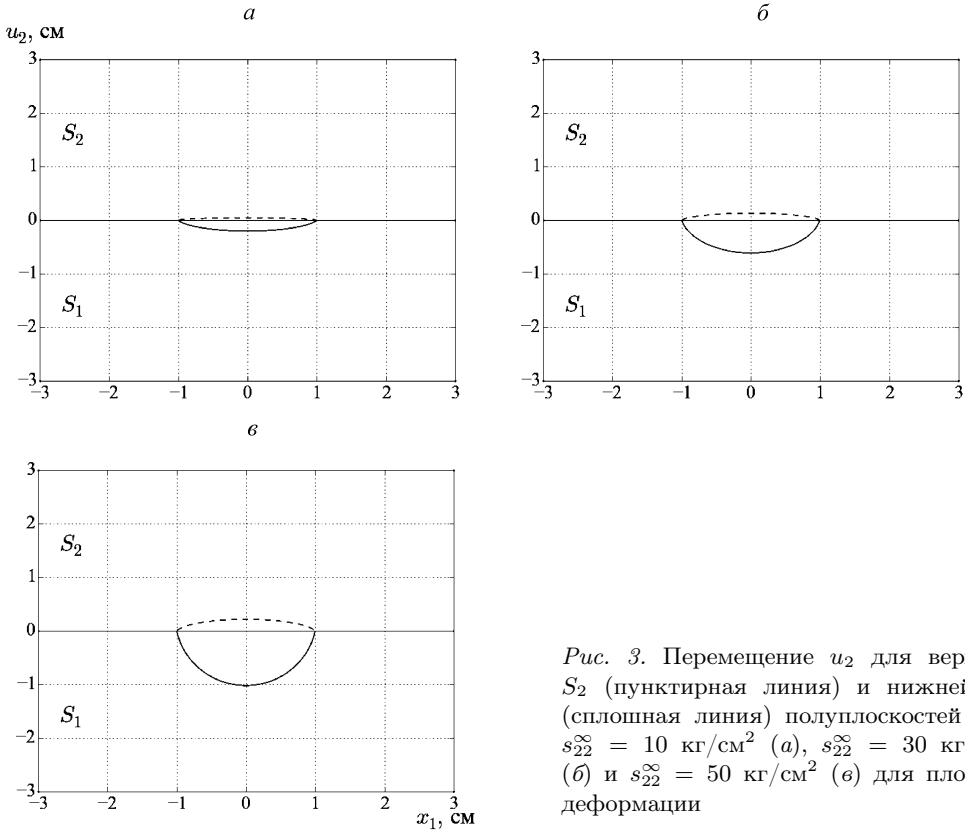


Рис. 3. Перемещение u_2 для верхней S_2 (пунктирная линия) и нижней S_1 (сплошная линия) полуплоскостей при $s_{22}^\infty = 10 \text{ кг/см}^2$ (а), $s_{22}^\infty = 30 \text{ кг/см}^2$ (б) и $s_{22}^\infty = 50 \text{ кг/см}^2$ (в) для плоской деформации

Исследуем перемещения берегов трещины для плоской деформации (рис. 3) и плоского напряженного состояния (рис. 4) при следующих параметрах материала: $\mu_1 = 10 \text{ кг/см}^2$, $\mu_2 = 50 \text{ кг/см}^2$, $\nu_1 = 0.48$, $\nu_2 = 0.45$ при одноосном растяжении плоскости напряжениями $s_{22}^\infty = 10 \text{ кг/см}^2$, $s_{22}^\infty = 30 \text{ кг/см}^2$ и $s_{22}^\infty = 50 \text{ кг/см}^2$.

В таблице представлены значения отклонений верхних и нижних берегов и раскрытие трещины при указанных выше нагрузках для плоской деформации.

Для коэффициентов интенсивности номинальных напряжений в окрестностях концов трещины используем формулы [18]

$$K^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \pm 1 \pm 0} [(\pm\tau - 1)^{0,5 \pm i\beta} (s_{22} - i s_{21})(\tau)] =$$

$$= \pm \sqrt{\pi} (1 \mp 2i\beta) 2^{\pm i\beta} (s_{22}^\infty - i s_{21}^\infty)(\tau),$$

здесь $\tau = x_1/a$ — безразмерная переменная на линии раздела. Такие коэффициенты интенсивности были получены и в линейной задаче о межфазной трещине [18].

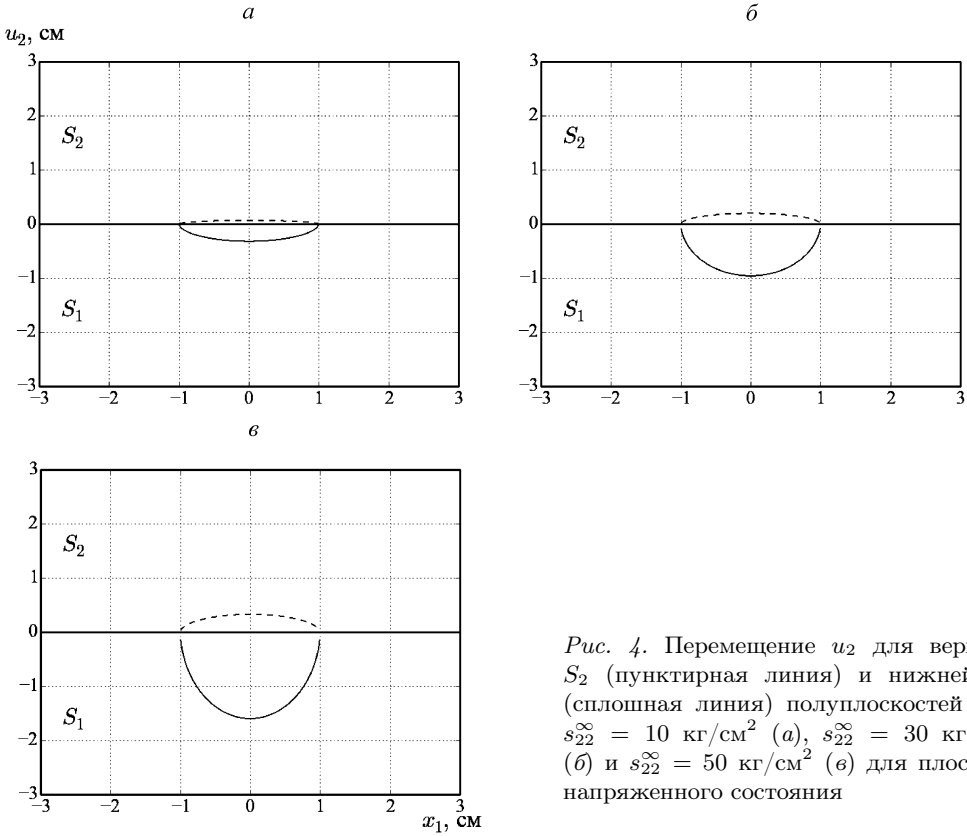


Рис. 4. Перемещение u_2 для верхней S_2 (пунктирная линия) и нижней S_1 (сплошная линия) полуплоскостей при $s_{22}^\infty = 10 \text{ кг/см}^2$ (а), $s_{22}^\infty = 30 \text{ кг/см}^2$ (б) и $s_{22}^\infty = 50 \text{ кг/см}^2$ (в) для плоского напряженного состояния

Таблица. Перемещение берегов трещины при различных нагрузках

Нагрузка	u_2 , см, при s_{22}^∞ , кг/см ²		
	10	30	50
<i>Для плоской деформации</i>			
u_2^+	0.043	0.130	0.216
u_2^-	0.204	0.613	1.021
Δu_2	0.247	0.743	1.237
<i>Для плоского напряженного состояния</i>			
u_2^+	0.065	0.196	0.326
u_2^-	0.320	0.959	1.599
Δu_2	0.385	1.155	1.925

Построим асимптотические разложения напряжений в окрестности правого конца трещины. Положим $z = a + re^{i\theta}$, разложения номинальных напряжений для верхней полуплоскости S_2 при $r \rightarrow 0$ для плоской деформации и плоского напряженного состояния:

$$s_{11} + is_{12} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left([h(\infty)(2\mu_2 R_2 + n_2) - 2\mu_2 K_2] \sqrt{r} + d_2 \sqrt{Y_2} \right) + O(\sqrt{r}),$$

$$s_{22} - is_{21} = l_2 \sqrt{V_2} \frac{1}{\sqrt{r}} + O(\sqrt{r}).$$
(10)

Параметры n_2, d_2, l_2, R_2, K_2 являются функциями угла θ , зависящими от типа плоской задачи. Напряжения для нижней полуплоскости S_1 получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств. Видим, что напряжения имеют корневую особенность у конца трещины.

Для тензора условных $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ и истинных напряжений Коши $\mathbf{T} = t_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ имеет место соотношение [17]

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1} \cdot J \mathbf{T},$$

в котором $J = \det \mathbf{G} = \lambda_3 (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21})$ — кратность изменения объема. Отсюда следует зависимость между напряжениями

$$t_{11} + it_{12} = \frac{s_{11} + is_{12}}{\varkappa_1}, \quad t_{22} - it_{21} = \frac{s_{22} - is_{21}}{\varkappa_2}. \quad (11)$$

Кратности изменения площади находятся из равенства $\varkappa_i = |\mathbf{e}_i \cdot J \mathbf{G}^{-1}|$:

$$\varkappa_1 = \lambda_3 \sqrt{g_{22}^2 + g_{12}^2}, \quad \varkappa_2 = \lambda_3 \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}.$$

Асимптотические разложения кратностей изменения площади для верхней полуплоскости S_2 при $r \rightarrow 0$ для плоской деформации

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{Y_2} \left(1 + \frac{1}{2Y_2} \left[m_2 \overline{L_2} + \overline{m_2} L_2 + \frac{\overline{K} L_2 + K \overline{L_2}}{1 - \nu_2} \right] \sqrt{r} \right) + O(\sqrt{r}), \\ \varkappa_2 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{V_2} \left(1 + \frac{p_2 \overline{E_2} + \overline{p_2} E_2}{2V_2} \sqrt{r} \right) + O(\sqrt{r}). \end{aligned}$$

При плоской деформации $\lambda_3 = 1$, следовательно, кратности изменения площади имеют особенность $1/\sqrt{r}$ при $r \rightarrow 0$. Из формул (10), (11) определим асимптотические разложения напряжений Коши

$$\begin{aligned} t_{11} + it_{12} &= d_2 + \frac{1}{\sqrt{Y_2}} \left(h(\infty) (2\mu_2 R_2 + n_2) - \frac{d_2 (m_2 \overline{L_2} + \overline{m_2} L_2)}{2\sqrt{Y_2}} - B_2 \right) \sqrt{r} + O(r), \\ t_{22} - it_{21} &= l_2 - \frac{l_2 (p_2 \overline{E_2} + \overline{p_2} E_2)}{2V_2} \sqrt{r} + O(r), \end{aligned}$$

где $R_k, Y_k, V_k, L_k, E_k, d_k, l_k, m_k, p_k, k = 1, 2$, — функции угла θ , зависящие от параметров задачи. Асимптотические разложения для нижней полуплоскости S_1 найдем циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств. У истинных напряжений Коши при плоской деформации и плоском напряженном состоянии нет особенности в окрестности концов трещины. Для плоского напряженного состояния параметр λ_3 имеет особенность $1/\sqrt{r}$, поэтому напряжения Коши обращаются в нуль у концов трещины.

Заключение. Получены точные решения нелинейных плоских задач теории упругости (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для неоднородной плоскости с межфазной трещиной. Механические свойства полуплоскостей описываются моделью полуплинейного материала, использование которой позволило применить теорию комплексных функций в нелинейных задачах и найти аналитические решения. Исходя из общих решений, построена асимптотика номинальных и истинных напряжений в окрестности конца трещины. Выведены формулы для раскрытия берегов трещины. Известно, что решения задач о межфазных трещинах содержат осцилляцию у концов трещин. Наличие осцилляции характерно для линейных и нелинейных задач. Осцилляция может привести

к наложению берегов трещины. Однако в подавляющем большинстве работ по межфазным трещинам, как и в рассматриваемом случае, такое явление не исследуется. Причина, по которой осцилляцию можно не учитывать, состоит в том, что она имеет место в очень малой окрестности конца трещины — порядка 10^{-8} – 10^{-4} от длины трещины. Эти оценки есть в известных руководствах (см., например, [19]).

Номинальные напряжения нелинейной задачи имеют особенность типа $1/\sqrt{r}$ при $r \rightarrow 0$ у концов трещины, у истинных напряжений Коши ее нет.

Сравнение коэффициентов интенсивности напряжений и формул для раскрытия трещины нелинейной и линейной [18] задач при одноосном растяжении плоскости показало, что первые полностью совпадают, а вторые отличаются постоянным множителем. Данный результат имеет практическую значимость, в какой-то мере он оправдывает применение решений уравнений линейной теории упругости в критериях разрушения композитных материалов с трещинами.

Литература

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13, N 2. P. 239–296.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 256 с.
4. *Zubov L. M.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. Berlin: Springer, 1997. 205 p.
5. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 93–106.
6. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 83–96.
7. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Доманская Т. О.* Анализ напряжений двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы для двух моделей гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 1. С. 38–52.
8. *Varley E., Cumberbatch E.* Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // Journal of Elasticity. 1980. Vol. 10, N 4. P. 341–405.
9. *Ru C. Q.* On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156, N 3–4. P. 219–234.
10. *Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A.* Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // Intern. Journal of Non-linear Mechanics. 2005. Vol. 38, N 2–3. P. 281–287.
11. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.
12. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Моделирование нелинейной деформации плоскости с эллиптическим отверстием или включением гармоническим материалом Джона // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 121–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.114
13. *Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V.* Modeling nonlinear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John's harmonic material // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. 2017. Vol. 50. Iss. 1. P. 74–81. DOI:10.3103/S1063454117010095
14. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Степанова В. А.* Двухкомпонентная плоскость из материала Джона с межфазной трещиной, нагруженной давлением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 3. С. 113–125.
15. *Domanskaia T., Malkov V., Malkova Yu.* Bi-material plane of John's harmonic material with a point force at interface // XXIV Intern. Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM). 21–26 August 2016. Montreal, Canada, 2016. P. 1958–1959.
16. *Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Нелинейная задача для композитной пластины с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Труды Второй

междунар. конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» (DFCMS–2016). Октябрь 2016. М.: ИМАШ РАН, 2016. С. 33–35.

17. Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 276 с.

18. Малькова Ю. В. Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 160 с.

19. Ито Ю. и др. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / под ред. Ю. Мураками; пер. с англ.; под ред. Р. В. Гольдштейна, Н. А. Махутова. М.: Мир. 1990. Т. 1. Пер. В. И. Даниленко. 447 с.; Т. 2. Пер. В. Э. Наумова. 1014 с. (*Ito Yu. et al. Stress intensity factors handbook. In 2 vol.*)

Статья рекомендована к печати проф. Н. В. Егоровым.

Статья поступила в редакцию 27 октября 2017 г.; принята к печати 15 марта 2018 г.

Контактная информация:

Доманская Татьяна Олеговна — аспирант; tanyath57@gmail.com

Мальков Вениамин Михайлович — докт. физ.-мат. наук, профессор; v.malkov@spbu.ru

Малькова Юлия Вениаминовна — канд. физ.-мат. наук, доцент; y.malkova@spbu.ru

Mathematical modeling of the deformation of composite plane with interface crack for semi-linear material

T. O. Domanskaya, V. M. Malkov, Yu. V. Malkova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V. Mathematical modeling of the deformation of composite plane with interface crack for semi-linear material. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 89–102. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.202>

The exact analytical solutions have been obtained for the nonlinear problems (plane-strain and plane-stress) for the bi-material plane with an interface crack. The plane is formed by joining of two half-planes made from different materials. Mechanical properties of half-planes are described with the model of semi-linear material. The application of this model has allowed using the methods of the complex functions in the nonlinear boundary value problems. For this particular case the problem is solved for the plane with a free interface crack at given constant nominal (Piola) stresses at infinity. The expressions for nominal stresses, Cauchy stresses and displacements are obtained. From the general solutions the asymptotic expansions of these functions have been constructed in vicinities of crack tips. It is established that in the nonlinear problem of uniaxial extension of a plane with a free crack the formulas which give the crack disclosing differ by a constant factor from the formulas of linear elasticity. The stress intensity factors (SIF) of nonlinear and linear problems coincide. The nominal stresses have the root singularity at the tips of a crack; the Cauchy stresses have no singularity.

Keywords: bi-material plane, plane-strain problem, plane-stress problem, method of complex functions, interface crack, semi-linear material.

References

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 1960, vol. 13, no. 2. pp. 239–296.
2. Lurie A. I. *Nelineynaya teoriya uprugosti [Non-linear elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 1980, 512 p. (In Russian)
3. Chernykh K. F., Litvinenkova Z. N. *Teoriya bolshih uprugih deformatsiy [Theory of large elastic deformations]*. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1988, 256 p. (In Russian)
4. Zubov L. M. *Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies*. Berlin, Springer Press, 1997. 205 p.

5. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskiye zadachi uprugosti dlya polulinyeynogo materiala [Plane problems of elasticity for semi-linear material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, iss. 3, pp. 93–106. (In Russian)
6. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskiye zadachi o sosredotochennykh silah dlya polulinyeynogo materiala [Plane problems on concentrated forces for semi-linear material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, iss. 3, pp. 83–96. (In Russian)
7. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Domanskaya T. O. Analiz napryazheniy dvuhkomponentnoy ploskosti i poluploskosti pri deystvii sosredotochennoy sily dlya dvuh modeley garmonicheskogo materiala [Analysis of stresses of bi-material plane and half-plane at action of a point force for two models of harmonic materials]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, iss. 1, pp. 38–52. (In Russian)
8. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes. *Journal of Elasticity*, 1980, vol. 10, no. 4, pp. 341–405.
9. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. *Acta Mechanica*, 2002, vol. 156, no. 3–4, pp. 219–234.
10. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics. *Intern. Journal of Non-linear mechanics*, 2005, vol. 38, no. 2–3, pp. 281–287.
11. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskaya zadacha nelineynoy uprugosti dlya garmonicheskogo materiala [Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2008, iss. 3, pp. 114–126. (In Russian)
12. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Modelirovanie nelineinoy deormacii ploskosti s ellipticheskim otverstiem ili vklucheniem garmonicheskim materialom Djona [Modeling nonlinear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John’s harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), iss. 1, pp. 121–130. (In Russian) DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.114
13. Mal’kov V. M., Mal’kova Yu. V. Modeling nonlinear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John’s harmonic material. *Vestnik of Saint Petersburg University, Mathematics*, 2017, vol. 50, iss. 1, pp. 74–81. © Allerton Press, Inc., 2017. DOI:10.3103/S1063454117010095
14. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Stepanova V. A. Dvuhkomponentnaya ploskost is materiala Dzhona s mezhfaznoy treshinoy, nagruzhennoy davleniem [Bi-material plane of John’s material with interface crack loaded by pressure]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2013, iss. 3, pp. 113–125. (In Russian)
15. Domanskaia T., Malkov V., Malkova Yu. Bi-material plane of John’s harmonic material with a point force at interface. *XXIV International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM)*, 21–26 August 2016. Montreal, Canada, 2016, pp. 1958–1959.
16. Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V. Nelineinaya zadacha dlya kompozitnoy plastinu s mezhfaznoy trechinoy dlya garmonicheskogo materiala Djona [Nonlinear problem for bi-material plate with interface crack for harmonic John’s material]. *2nd International conference “Deformation and Failure of Composite Materials and Structures” (DFCMS–2016)*. October 2016. Moscow, Institute of Engineering RAS Publ., 2016, pp. 33–35. (In Russian)
17. Malkov V. M. *Vvedenie v nelineynuyu uprugost [Introduction to non-linear elasticity]*. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2010, 276 p. (In Russian)
18. Malkova Yu. V. *Nekotorye zadachi dlya dvuhkomponentnoy ploskosti s krivolinyeynymi treshinami [Some problems for bi-material plane with curvilinear cracks]*. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2008, 160 p. (In Russian)
19. Ito Yu. et al. *Stress intensity factors handbook*. In 2 vol. Oxford etc., Oxford University Press, 1985–1986. (Russ. ed.: Ito Yu. et al. *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazheniy*. Moscow, Mir Publ., 1990, vol. 1, 447 p.; vol. 2, 1014 p.)

Author’s Information:

Domanskaya Tatyana O. — postgraduate student; tanyath57@gmail.com

Malkov Venyamin M. — Dr. Sci. in physics and mathematics, professor; v.malkov@spbu.ru

Malkova Yulia V. — PhD Sci. in physics and mathematics, associate professor; y.malkova@spbu.ru