ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.51

MSC 34K20

**О диагональной устойчивости некоторых классов
сложных систем с запаздыванием****А. Ю. Александров, А. А. Воробьева, Е. П. Колпак*Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Александров А. Ю., Воробьева А. А., Колпак Е. П. О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 72–88. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.201>

В работе рассматривается проблема диагональной устойчивости нелинейных дифференциально-разностных систем. Изучаются некоторые классы сложных систем с запаздыванием и нелинейностями секторного типа. Предполагается, что эти системы описывают взаимодействие двумерных блоков с запаздыванием в связях между блоками. Анализируются два вида структуры связей. Для каждого вида находятся необходимые и достаточные условия существования диагональных функционалов Ляпунова—Красовского. Существование таких функционалов гарантирует асимптотическую устойчивость нулевых решений рассматриваемых систем для любого неотрицательного запаздывания и любых допустимых нелинейностей. Такие условия формулируются в терминах гурвицевости специальным образом построенных метцлеровых матриц. Предложенные подходы применяются для анализа устойчивости некоторых моделей популяционной динамики. Исследуются обобщенные модели Лотки—Вольтерра, состоящие из нескольких взаимодействующих пар типа хищник—жертва. С помощью прямого метода Ляпунова и диагональных функционалов Ляпунова—Красовского выводятся условия, при выполнении которых положения равновесия описываемых моделей асимптотически устойчивы в целом в положительном ортанте фазового пространства при любом неотрицательном запаздывании. Приводятся иллюстративный пример и результаты численного моделирования, демонстрирующие эффективность разработанных подходов.

Ключевые слова: диагональная устойчивость, сложная система, запаздывание, динамика популяций, функционал Ляпунова—Красовского.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00587-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

Диагональные функции Ляпунова эффективно применяются для анализа устойчивости широких классов систем [1–5]. С одной стороны, это обусловлено тем, что они обладают простой структурой; с другой — для многих типов нелинейных систем решение задачи построения функций Ляпунова естественным образом приводит к тому, что требуемые функции выбираются диагональными, причем с помощью таких функций в ряде случаев удается получить не только достаточные, но и необходимые условия устойчивости [1, 4, 6]. Следует отметить, что особенно часто диагональные функции Ляпунова используются при анализе устойчивости сложных систем [1, 3, 5, 7, 8], а также моделей, описывающих взаимодействие видов в биологическом сообществе [1, 2, 9, 10].

Система, для которой существует диагональная функция Ляпунова, называется *диагонально устойчивой* [1, 11]. Проблема диагональной устойчивости хорошо изучена для линейных систем дифференциальных и разностных уравнений (см. [1, 3] и цитируемую там литературу). В частности, известно [3], что если линейная стационарная система дифференциальных уравнений является позитивной, то она асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда для нее существует функция Ляпунова в виде квадратичной формы с диагональной матрицей, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Аналогичный результат имеет место и для линейных разностных систем [1, 3]. В ряде работ (см., например, [1, 6, 11–17]) найдены условия существования диагональных функций Ляпунова как для линейных, так и для нелинейных систем со специальной структурой связей между уравнениями.

В статьях [18–20] исследовались условия диагональной устойчивости дифференциально-разностных систем. Был установлен критерий диагональной устойчивости для систем линейных стационарных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием [19]. Однако непосредственное применение указанного критерия довольно затруднительно. В связи с этим актуальна задача выделения классов дифференциально-разностных систем, для которых можно указать конструктивно проверяемые условия диагональной устойчивости. Некоторые результаты в данном направлении получены в работах [20, 21].

В настоящей статье рассматриваются два класса сложных систем, описывающих взаимодействие двумерных блоков, с запаздыванием в связях между этими блоками. Для таких систем находятся необходимые и достаточные условия существования диагональных функционалов Ляпунова—Красовского, удовлетворяющих требованиям теоремы Красовского об асимптотической устойчивости [22]. Условия имеют конструктивный характер и сводятся к проверке гурвицевости специальным образом построенных метцлеровых матриц. Кроме того, разработанные подходы применяются для анализа устойчивости обобщенных вольтерровских моделей популяционной динамики.

Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau)). \quad (1)$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ — вектор состояния системы; A и B — постоянные матрицы; векторная функция $f(x)$ задана и непрерывна при $\|x\| < H$ ($0 < H \leq +\infty$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора); τ — постоянное неотрицательное запаздывание. Будем считать, что $f(x)$ — сепарабельная нелинейность, т. е. $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$, а скалярные функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условиям секторного типа: $x_i f_i(x_i) > 0$

при $x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$. Такие функции будем называть *допустимыми*. Из сделанных предположений следует, что изучаемая система имеет нулевое решение.

Уравнения вида (1) широко используются в качестве моделей нейронных сетей и систем автоматического управления [1, 5].

Пусть начальные функции для решений системы (1) принадлежат пространству $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $\varphi(\theta) : [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\varphi\|_\tau = \max_{\theta \in [- \tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$. Через x_t обозначим отрезок решения: $x_t : \xi \rightarrow x(t + \xi), \xi \in [- \tau, 0]$.

Определение. Будем говорить, что система (1) диагонально устойчива, если существуют диагональные положительно определенные матрицы $P = \text{diag}\{p_1, \dots, p_n\}$ и $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$, при которых матрица

$$R = A^T P + PA + Q + PBQ^{-1}B^T P \quad (2)$$

отрицательно определена.

З а м е ч а н и е 1. Известно [18], что если система (1) диагонально устойчива, то для нее можно построить диагональный функционал Ляпунова—Красовского вида

$$V(x_t) = 2 \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{x_i(t)} f_i(u) du + \sum_{i=1}^n q_i \int_{t-\tau}^t f_i^2(x_i(\theta)) d\theta,$$

удовлетворяющий при любом значении запаздывания и любых допустимых нелинейностях требованиям теоремы Красовского об асимптотической устойчивости. Значит, из диагональной устойчивости системы (1) вытекает, что ее нулевое решение асимптотически устойчиво при каждом $\tau \geq 0$ и любых допустимых функциях $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$.

В статье [19] получен критерий диагональной устойчивости системы (1). Однако условия этого критерия имеют недостаточно конструктивный характер. Потому важной задачей является нахождение классов матриц A и B , для которых можно гарантировать диагональную устойчивость изучаемой системы.

В работах [19, 20] доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть A — метцлерова, а B — неотрицательная матрица. Тогда для диагональной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы матрица $A + B$ была гурвицевой.

Утверждение 2. Пусть $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, $E = \text{diag}\{e_1, \dots, e_n\}$, где $d_i \in \{-1; +1\}$, $e_i \in \{-1; +1\}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для диагональной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система

$$\dot{x}(t) = DADf(x(t)) + DBEf(x(t - \tau))$$

была диагонально устойчива.

С использованием утверждений 1 и 2 в статье [20] был определен ряд классов матриц A и B , для которых можно указать конструктивно проверяемые условия диагональной устойчивости системы (1).

Рассмотрим систему (1) со специальной структурой. Будем считать, что n — четное число ($n = 2k$, k — натуральное), а изучаемые уравнения представляют собой сложную систему, описывающую взаимодействие двумерных блоков, с запаздыванием в связях между этими блоками. Таким образом, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{n\ n} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица B характеризует структуру связей в сложной системе. В данной статье рассмотрим два типа таких матриц и для каждого типа установим необходимые и достаточные условия диагональной устойчивости соответствующей системы (1).

Критерии диагональной устойчивости. Предположим сначала, что матрицу B можно записать следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При такой структуре связей система (1) описывает взаимодействие последовательно соединенных двумерных блоков (рис. 1).

Рис. 1. Последовательно соединенные двумерные блоки

Строим вспомогательную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1\ n-1} & \tilde{a}_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n\ n-1} & \tilde{a}_{n\ n} \end{pmatrix},$$

элементы которой определяются по формулам $\tilde{a}_{ii} = a_{ii}$ при $i = 1, \dots, n$; $\tilde{a}_{2l-1\ 2l} = |a_{2l-1\ 2l}|$, $\tilde{a}_{2l\ 2l-1} = |a_{2l\ 2l-1}|$, если $a_{2l-1\ 2l}a_{2l\ 2l-1} \geq 0$, и $\tilde{a}_{2l-1\ 2l} = \tilde{a}_{2l\ 2l-1} = 0$, если $a_{2l-1\ 2l}a_{2l\ 2l-1} < 0$, $l = 1, \dots, k$. Заметим, что $\tilde{A}$ — метцлерова матрица.

Кроме того, для заданной матрицы C через $\overline{C}$ обозначим матрицу, элементы которой равны модулям соответствующих элементов матрицы C .

Если для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ один из элементов a_{jj+1} , a_{j+1j} матрицы A равен нулю, то систему (1) можно представить в виде двух подсистем, одна из которых действует на другую. Тогда задача поиска условий диагональной устойчивости для исходной системы разбивается на две аналогичные задачи для указанных подсистем. Поэтому далее будем считать, что $a_{jj+1} \neq 0$, $a_{j+1j} \neq 0$, $j = 1, \dots, n-1$.

С помощью таких же рассуждений получаем, что достаточно рассмотреть случай, когда $b_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n-2$.

Теорема 1. Пусть матрицы A и B имеют вид (3) и (4) соответственно. Тогда для диагональной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы матрица $\tilde{A} + \overline{B}$ была гурвицевой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, можно считать, что все элементы матрицы B неотрицательны. Кроме того, очевидно, что для диагональной устойчивости системы (1) необходимо, чтобы выполнялись неравенства $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Строим матрицу (2), соответствующую рассматриваемой системе. Получаем $R = \hat{R} + \tilde{R}$, где $\hat{R} = \text{diag}\{q_1, 0, \dots, 0, q_n\}$, а $\tilde{R}$ — блочно-диагональная матрица

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_k \end{pmatrix},$$

блоки которой имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 2a_{11}p_1 & a_{12}p_1 + a_{21}p_2 \\ a_{12}p_1 + a_{21}p_2 & 2a_{22}p_2 + q_2 + \frac{p_2^2 b_2^2}{q_3} \end{pmatrix},$$

$$R_s = \begin{pmatrix} 2a_{2s-1\ 2s-1}p_{2s-1} + q_{2s-1} + \frac{p_{2s-1}^2 b_{2s-1}^2}{q_{2s-2}} & a_{2s-1\ 2s}p_i + a_{2s\ 2s-1}p_{2s} \\ a_{2s-1\ 2s}p_i + a_{2s\ 2s-1}p_{2s} & 2a_{2s\ 2s}p_{2s} + q_{2s} + \frac{p_{2s}^2 b_{2s}^2}{q_{2s+1}} \end{pmatrix},$$

$$s = 2, \dots, k-1,$$

$$R_k = \begin{pmatrix} 2a_{n-1n-1}p_{n-1} + q_{n-1} + \frac{p_{n-1}^2 b_{n-1}^2}{q_{n-2}} & a_{n-1n}p_{n-1} + a_{nn-1}p_n \\ a_{n-1n}p_{n-1} + a_{nn-1}p_n & 2a_{nn}p_n \end{pmatrix}.$$

Параметры q_1 и q_n входят только в матрицу $\hat{R}$, и их можно выбирать сколько угодно малыми положительными. Поэтому для диагональной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа $p_1, \dots, p_n$, $q_2, \dots, q_{n-1}$, при которых все блоки $R_1, \dots, R_k$ отрицательно определены.

Матрица R_1 отрицательно определена тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$2a_{11} \left(2a_{22}p_2 + q_2 + \frac{p_2^2 b_2^2}{q_3} \right) > \frac{(a_{12}p_1 + a_{21}p_2)^2}{p_1}. \quad (5)$$

Параметр p_1 входит только в матрицу R_1 . Для получения наиболее широкой области значений элементов матриц A и B , при которых можно гарантировать диагональную устойчивость, следует взять $p_1 = p_2|a_{21}/a_{12}|$. Тогда неравенство (5) принимает вид

$$2a_{11} \left(2a_{22} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{p_2 b_2^2}{q_3} \right) > |a_{12}a_{21}| (\text{sign}a_{12}\text{sign}a_{21} + 1)^2.$$

Далее находим оптимальное значение параметра p_2 . Имеем $p_2 = \sqrt{q_2 q_3}/b_2$. Приходим к условиям $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$,

$$q_2 < c_1 q_3, \quad (6)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{b_2^2} \left(\frac{|a_{12}a_{21}|}{4a_{11}} (\text{sign}a_{12}\text{sign}a_{21} + 1)^2 - a_{22} \right)^2.$$

Рассмотрим теперь условие отрицательной определенности матрицы R_2

$$\left(2a_{33}p_3 + q_3 + \frac{p_3^2 b_3^2}{q_2} \right) \left(2a_{44}p_4 + q_4 + \frac{p_4^2 b_4^2}{q_5} \right) > (a_{34}p_3 + a_{43}p_4)^2.$$

Учитывая ограничение (6) на величину q_2 , получаем

$$\left(2a_{33}p_3 + q_3 + \frac{p_3^2 b_3^2}{c_1 q_3} \right) \left(2a_{44}p_4 + q_4 + \frac{p_4^2 b_4^2}{q_5} \right) > (a_{34}p_3 + a_{43}p_4)^2.$$

Это соотношение задает наиболее широкую область значений $a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44}, b_3, b_4$ при $q_3 = p_3 b_3 / \sqrt{c_1}$. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$2 \left(a_{33} + \frac{b_3}{\sqrt{c_1}} \right) \left(2a_{44}p_4 + q_4 + \frac{p_4^2 b_4^2}{q_5} \right) > \frac{(a_{34}p_3 + a_{43}p_4)^2}{p_3}. \quad (7)$$

Условие (7) с точностью до обозначений совпадает с неравенством (5). Поэтому, применяя предыдущие рассуждения, можно последовательно определить оптимальные значения параметров $p_1, \dots, p_n, q_2, \dots, q_{n-1}$.

Заметим, что если для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ имеем $a_{j+1}a_{j+1j} < 0$, то величина p_j выбирается так, чтобы выполнялось равенство $a_{j+1}p_j + a_{j+1j}p_{j+1} = 0$, а если $a_{j+1}a_{j+1j} > 0$, то, не умаляя общности, можно считать, что в полученных неравенствах $a_{j+1} > 0, a_{j+1j} > 0$.

Таким образом, условия диагональной устойчивости системы (1) с матрицами (3) и (4) совпадают с условиями диагональной устойчивости соответствующей системы

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}f(x(t)) + \overline{B}f(x(t-\tau)). \quad (8)$$

Матрица $\tilde{A} + \overline{B}$ является метцлеровой. Следовательно (см. утверждение 1), система (8) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда $\tilde{A} + \overline{B}$ — гурвицева матрица. Теорема доказана.

Предположим теперь, что матрица B в системе (1) определяется по формуле

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Свойственная этому случаю структура связей в сложной системе показана на рис. 2.

Теорема 2. Пусть матрицы A и B имеют вид (3) и (9) соответственно. Тогда для диагональной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы матрица $\tilde{A} + \overline{B}$ была гурвицевой.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что, не умаляя общности, можно считать матрицу B неотрицательной, а для диагональной устойчивости системы (1) необходимо выполнение неравенств $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Для рассматриваемой системы матрица (2) представима в виде $R = \hat{R} + \tilde{R}$. В данном случае $\hat{R} = \text{diag}\{q_1, 0, q_3, 0, \dots, q_{n-1}, 0\}$,

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1 b_4 p_2 p_6}{q_4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{34} & r_{44} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} & r_{56} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_1 b_4 p_2 p_6}{q_4} & 0 & 0 & r_{56} & r_{66} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_3 b_6 p_4 p_8}{q_6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{b_{n-5} b_{n-2} p_{n-4} p_n}{q_{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n-1n-1} & r_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn-1} & r_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$r_{2s-1\ 2s-1} = 2a_{2s-1\ 2s-1}p_{2s-1}, \quad r_{2s-1\ 2s} = a_{2s-1\ 2s}p_{2s-1} + a_{2s\ 2s-1}p_{2s}, \quad s = 1, \dots, k;$$

$$r_{2l\ 2l} = 2a_{2l\ 2l}p_{2l} + q_{2l} + \left(\frac{b_{2l-2}^2}{q_{2l-2}} + \frac{b_{2l-1}^2}{q_{2l+2}} \right) p_{2l}^2, \quad l = 2, \dots, k-1;$$

$$r_{22} = 2a_{22}p_2 + q_2 + \frac{b_1^2 p_2^2}{q_4}, \quad r_{nn} = 2a_{nn}p_n + q_n + \frac{b_{n-2}^2 p_n^2}{q_{n-2}}.$$

Рис. 2. Структура связей в сложной системе, соответствующей матрицам (3) и (9)

Пусть Δ_j — главный диагональный минор j -го порядка матрицы $\tilde{R}$, $j = 1, \dots, n$, и

$$\tilde{\Delta}_{2s-1\ 2s} = r_{2s-1\ 2s-1}r_{2s\ 2s} - r_{2s-1\ 2s}^2, \quad s = 1, \dots, k.$$

Нетрудно видеть, что система (1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $p_1, \dots, p_n$, $q_2, q_4, \dots, q_n$, при которых выполняются неравенства $\tilde{\Delta}_{2s-1\ 2s} > 0$, $\Delta_{2s} > 0$, $s = 1, \dots, k$.

Выберем некоторое значение $m \in \{1, \dots, k\}$. Соответствующий параметр p_{2m-1} входит в условия $\tilde{\Delta}_{2m-1\ 2m} > 0$,

$$\Delta_{2s} > 0, \quad s = m, \dots, k. \quad (10)$$

Для каждого $s \in \{m, \dots, k\}$, разложив определитель Δ_{2s} по столбцам с номерами $2m-1$, $2m$, имеем

$$\Delta_{2s} = \omega'_{sm} \tilde{\Delta}_{2m-1\ 2m} + 2a_{2m-1\ 2m-1} p_{2m-1} \omega''_{sm},$$

где ω'_{sm} , ω''_{sm} — выражения, не зависящие от p_{2m-1} , причем $\omega'_{sm} > 0$.

Записывая соотношения (10) в виде

$$\omega'_{sm} \frac{\tilde{\Delta}_{2m-1\ 2m}}{p_{2m-1}} + 2a_{2m-1\ 2m-1} \omega''_{sm} > 0, \quad s = m, \dots, k,$$

приходим к выводу, что для получения наиболее широкой области значений элементов матриц A и B , при которых гарантируется диагональная устойчивость, нужно максимизировать выражение $\tilde{\Delta}_{2m-1\ 2m}/p_{2m-1}$. Таким образом, как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что условия диагональной устойчивости системы (1) с матрицами (3) и (9) совпадают с условиями диагональной устойчивости соответствующей системы (8). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Указанные в формулировках теорем 1 и 2 матрицы $\tilde{A} + \overline{B}$ являются метцлеровыми. Известно [5], что для гурвицевости таких матриц необходимо и достаточно выполнение условий Севастьянова—Котелянского.

З а м е ч а н и е 3. Пусть матрицы A и B имеют вид (3) и (4) соответственно. Тогда матрица $\tilde{A} + \overline{B}$ трехдиагональная. Для проверки условий Севастьянова—Котелянского для такой матрицы можно использовать известные рекуррентные формулы для нахождения главных диагональных миноров трехдиагональных матриц [23].

Анализ устойчивости обобщенных вольтерровских моделей. Покажем далее, что разработанные выше подходы могут применяться для получения условий устойчивости положений равновесия моделей, описывающих взаимодействие видов в биологическом сообществе.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i(t) = g_i(x_i(t)) \left(c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t-\tau)) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ — вектор состояния системы; функции $g_i(x_i)$ и $f_i(x_i)$ определены при $x_i \geq 0$; c_i, a_{ij}, b_{ij} — постоянные коэффициенты; $i, j = 1, \dots, n$; τ — постоянное неотрицательное запаздывание. Система (11) представляет собой обобщение классической модели межвидового взаимодействия Лотки—Вольтерра [2]. Подобные модели исследовались, например, в работах [1, 2, 19, 24].

В рассматриваемых уравнениях $x_i(t)$ — численность i -й популяции, c_i — коэффициент естественного прироста i -й популяции (удельная рождаемость минус удельная смертность), слагаемые $a_{ii}g_i(x_i(t))f_i(x_i(t))$ и $b_{ii}g_i(x_i(t))f_i(x_i(t-\tau))$ определяют процессы самолимитирования популяций по численности, члены $a_{ij}g_i(x_i(t))f_j(x_j(t))$ и $b_{ij}g_i(x_i(t))f_j(x_j(t-\tau))$ при $i \neq j$ характеризуют влияние одних популяций на другие. Наличие запаздывания τ может быть обусловлено временем развития видов, зависимостью коэффициентов прироста одних видов от предыстории других, различной скоростью процессов размножения и гибели для разных возрастных групп и рядом других причин (см., например, [1, 24]).

Обозначим через $\mathbb{R}_+^n$ положительный ортант пространства $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть начальные функции для решений изучаемой системы принадлежат пространству $C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+^n)$ непрерывных вектор-функций $\varphi(\theta) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$.

В соответствии со стандартными предположениями (см. [2, 9, 24]) будем считать, что функции $f_i(x_i)$, $g_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, обладают следующими свойствами:

- 1) $f_i(x_i)$ и $g_i(x_i)$ непрерывны и локально липшицевы при $x_i \in [0, +\infty)$;
- 2) $f_i(x_i)$ и $g_i(x_i)$ строго возрастают при $x_i \in [0, +\infty)$;
- 3) $g_i(0) = f_i(0) = 0$;
- 4) $f_i(x_i) \rightarrow +\infty$ при $x_i \rightarrow +\infty$;
- 5) $\int_1^{+\infty} f_i(u)/g_i(u) du = +\infty$;
- 6) $\int_0^1 1/g_i(u) du = +\infty$.

Из указанных свойств следует, что положительный ортант является инвариантным множеством для системы (11).

Пусть у данной системы существует положение равновесия $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда она представима в виде

$$\dot{x}_i(t) = g_i(x_i(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (f_j(x_j(t)) - f_j(\bar{x}_j)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} (f_j(x_j(t-\tau)) - f_j(\bar{x}_j)) \right), \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Предположим, что для матриц $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ можно выбрать положительно определенные матрицы $P = \text{diag}\{p_1, \dots, p_n\}$ и $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$ так, чтобы матрица (2) была отрицательно определена.

Используя в качестве коэффициентов диагональные элементы матриц P и Q , строим функционал Ляпунова—Красовского

$$V(x_t) = 2 \sum_{i=1}^n p_i \int_{\bar{x}_i}^{x_i(t)} \frac{f_i(u) - f_i(\bar{x}_i)}{g_i(u)} du + \sum_{i=1}^n q_i \int_{t-\tau}^t (f_i(x_i(\theta)) - f_i(\bar{x}_i))^2 d\theta. \quad (13)$$

З а м е ч а н и е 4. По своей форме функционал (13) отличается от функционала, используемого для системы (1). Однако условия отрицательной определенности его производной эквивалентны условию отрицательной определенности матрицы (2).

Таким образом, получаем, что для производной функционала (13) на решениях системы (12), содержащихся в положительном ортанте, справедлива оценка

$$\dot{V} \leq -\alpha (\|f(x(t)) - f(\bar{x})\|^2 + \|f(x(t-\tau)) - f(\bar{x})\|^2),$$

в которой $\alpha = \text{const} > 0$, $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$. Следовательно [25], если матрицы A и B удовлетворяют условиям определения, то при любом значении запаздывания положение равновесия $\bar{x}$ системы (11) асимптотически устойчиво в целом в ортанте $\mathbb{R}_+^n$.

Далее будем считать, что n — четное число ($n = 2k$, k — натуральное), а матрица A , построенная для системы (11), имеет вид (3), где

$$a_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad a_{2s-1, 2s} > 0, \quad a_{2s, 2s-1} < 0, \quad s = 1, \dots, k. \quad (14)$$

Такая структура матрицы A соответствует случаю, когда система (11) состоит из k двумерных подсистем (камер), причем каждая подсистема представляет собой модель типа хищник—жертва (x_{2s-1} — хищники, x_{2s} — жертвы, $s = 1, \dots, k$).

В рассматриваемой модели учитывается фрагментация ареалов обитания видов. Хорошо известно (см., например, [26, 27]), что эволюционно сложившиеся связи с местообитаниями у популяций формировались длительные периоды. Стихийные бедствия и антропогенное давление приводили и приводят к фрагментации ареалов с распадом единой популяции на разобщенные группировки, между которыми может происходить обмен особями. Размещение особей зависит от структуры ландшафта, наличия трофического ресурса, климатических условий. Неблагоприятные абиотические факторы оказывают сильное влияние на половозрастную структуру популяции, формирование временных группировок, социальные взаимоотношения между особями.

Отрицательные коэффициенты $a_{11}, \dots, a_{nn}$ характеризуют внутривидовую конкуренцию. Следует заметить, что формирование пространственной структуры распределения особей является адаптивным механизмом, направленным на эффективное использование ресурсов. Регуляция численности значительной части популяций определяется ее плотностью в ареале, увеличение которой может привести к нехватке ресурсов, угнетающему давлению на особей, что проявляется в повышении смертности и уменьшении рождаемости. Стресс обостряет и конкуренцию между особями за ресурсы. Концепция наличия верхнего порога численности позволяет для описания изменения численности одиночной популяции использовать логистическое уравнение [26, 27].

Относительно матрицы B предположим сначала, что она определяется по формуле (4), в которой

$$b_{2s-1} < 0, \quad b_{2s} > 0, \quad s = 1, \dots, k-1. \quad (15)$$

Коэффициенты $b_1, \dots, b_{n-2}$ могут характеризовать взаимодействие между хищниками и жертвами, обитающими в соседних ареалах.

Известно [28, 29], что в системе хищник—жертва хищник группируется на периферии зон проживания жертвы, плотность которой выше в центральной части ареала. Под давлением хищника возникают миграционные потоки жертвы вглубь ареала, что может вызвать недостаток трофического ресурса у первого. Высокая подвижность хищника позволяет ему перемещаться достаточно быстро к другим местообитаниям жертвы. Внутренняя система регулирования численности хищника определяется уровнем конкурентных взаимоотношений, который может зависеть от эффективности стратегий охоты, закреплением за отдельными особями или их группами наилучших участков, выдавливанием из зон обитания социально менее значимых особей и другими факторами. Хищник не рождается «готовым» убийцей. В период обучения охоте молодых особей в своей зоне обитания охотятся все особи. Процесс поиска жертвы может происходить и на соседних участках ее обитания. Но в них охотятся особи уже взрослые или владеющие необходимыми стратегиями охоты на удаленных от постоянного места обитания территориях. Это приводит к временной задержке воспроизводства потомства мигрирующими особями [30], которая, в свою очередь, обуславливается биотическими и абиотическими факторами, видом хищника. В изучаемой модели она учитывается введением запаздывания.

Матрица (4) (при условиях (15)) представляет случай, когда хищник, постоянно обитающий в ареале l , $l = 2, \dots, k$, охотится и в ареале $l-1$, т. е. те взрослые особи, которые были в l -м ареале в момент времени $t-\tau$, уничтожают жертву в $(l-1)$ -м ареале. При этом на поддержание хищника в l -м ареале расходуется только «взрослая» часть жертвы на момент времени $t-\tau$. Такая модель позволяет считать переход хищника в соседнюю камеру и возвращение с добытой жертвой в исходную мгновенными.

Для рассматриваемой матрицы A соответствующая ей матрица $\tilde{A}$ является диагональной: $\tilde{A} = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$. Применяя теорему 1, получаем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть матрицы A и B , построенные для системы (11), определяются по формулам (3) и (4) соответственно, причем справедливы неравенства (14) и (15). Если у данной системы в положительном ортанте существует положение равновесия и выполняются условия

$$a_{2s-2s}a_{2s+1-2s+1} > |b_{2s-1}b_{2s}|, \quad s = 1, \dots, k-1, \quad (16)$$

то при любом значении запаздывания это положение равновесия будет асимптотически устойчиво в целом в $\mathbb{R}_+^n$.

Рассмотрим теперь случай, когда для коэффициентов b_{ij} системы (11) справедливы соотношения

$$b_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

причем если хотя бы один из индексов i и j является нечетным, то соответствующий коэффициент b_{ij} равен нулю. Таким образом, матрица B имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & \cdots & 0 & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} & \cdots & 0 & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{n2} & 0 & b_{n4} & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Модель (11) допускает существование в каждой из подсистем как разных видов жертв, так и различных ее группировок одного вида. Внутривидовая конкуренция у оседлых популяций определяется наличием у отдельных социально структурированных групп индивидуальных участков обитания. Проникающие на соседние участки особи, а к ним относятся прежде всего взрослые, постепенно под давлением местных видов выдавливаются на свой участок или на ближайшие участки. Медленно мигрирующие популяции распадаются на половозрастные группы, между которыми возникает конкуренция либо за ресурсы, либо за женские особи. У мигрирующих популяций, как и у оседлых, конкурентные взаимоотношения проявляются в первую очередь между взрослыми особями [31]. Матрица (18) учитывает такие конкурентные взаимоотношения между жертвами всех подсистем, независимо от обитающего в подсистеме вида. В модели (11) это дает возможность за счет введения запаздывания считать, что конкуренция присуща взрослым особям, и наступает она значительно быстрее, чем переработка трофического ресурса.

Теорема 4. Пусть матрицы A и B , построенные для системы (11), определяются по формулам (3) и (18) соответственно, причем справедливы неравенства (14) и (17). Если у данной системы в положительном ортанте существует положение равновесия, а матрица $\tilde{A} + \bar{B}$ является гурвицевой, то при любом значении запаздывания это положение равновесия будет асимптотически устойчиво в целом в ортанте $\mathbb{R}_+^n$.

Доказательство теоремы 4 проводится так же, как и теоремы 2.

З а м е ч а н и е 5. В рассмотренных моделях взаимодействующих популяций учитывались хищничество, внутривидовая и межвидовая конкуренции. Число разнообразных видов, как жертв, так и хищников, может быть любым. При условии, что межвидовая конкуренция и миграция хищников оказывают на численность популяций жертв меньшее влияние, чем внутривидовая конкуренция, соответствующая система уравнений будет асимптотически устойчивой. Следует отметить, что условия устойчивости не зависят от величин $a_{2s-1}2s$, $a_{2s}2s-1$, $s = 1, \dots, k$, характеризующих взаимодействие между хищниками и жертвами внутри камер. Число подсистем можно сопоставить с биологическим разнообразием видов. Тогда асимптотическую устойчивость можно рассматривать как теоретическое подтверждение такой концепции: видовое разнообразие является атрибутом устойчивости экосистем.

Пример. Пусть система (11) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(-1 - x_1(t) + 2x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)(7 - 2x_2(t) - 3x_1(t) - 2x_3(t - \tau)), \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)(-3 - 3x_3(t) + 5x_4(t) + x_2(t - \tau)), \\ \dot{x}_4(t) = x_4(t)(8 - 2x_4(t) - 2x_3(t) - 4x_5(t - \tau)), \\ \dot{x}_5(t) = x_5(t)(-1 - 3x_5(t) + 3x_6(t) + x_4(t - \tau)), \\ \dot{x}_6(t) = x_6(t)(9 - 4x_6(t) - 5x_5(t)). \end{cases} \quad (19)$$

У этой системы существует положение равновесия

$$\bar{x} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T. \quad (20)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что в данном случае выполнены неравенства (16).

Применяя теорему 3, получаем, что при любом неотрицательном запаздывании τ положение равновесия (20) системы (19) асимптотически устойчиво в целом в положительном ортанте $\mathbb{R}_+^n$.

Решение уравнений (19) осуществлялось с помощью системы MATLAB. Считалось, что $\tau = 1$, а все величины являются безразмерными. В качестве начальных условий рассматривался вариант, когда жертвы на начальном промежутке времени находятся в равновесном (при отсутствии хищника) состоянии $x_2 = 7/2$, $x_4 = 4$, $x_6 = 9/4$, и в камеры проникает малочисленный хищник: $x_1(t) = x_3(t) = x_5(t) = 0.01$ при $t \in [-1, 0]$. Результаты компьютерного моделирования представлены в виде зависимостей численностей популяций от времени (рис. 3).

Рис. 3. Зависимости численностей популяций от времени

Полученные зависимости согласуются с установленными теоретическими выводами. Малые возмущения исходного положения равновесия $\bar{x} = (0, 7/2, 0, 4, 0, 9/4)^T$ приводят к нарушению этого равновесного состояния, система через возникшие затухающие колебания численности со временем переходит в новое равновесное состояние (20).

Литература

1. *Kaszkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1999. 267 p.
2. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.
3. *Berman A., Plemmons R. J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Philadelphia: SIAM, 1987. 361 p.
4. *Barker G. P., Berman A., Plemmons R. J.* Positive diagonal solutions to the Lyapunov equations // *Linear and Multilinear Algebra*. 1978. Vol. 5, N 4. P. 249–256.

5. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.
6. *Sontag E. D.* Passivity gains and the “secant condition” for stability // *Systems and Control Letters*. 2006. Vol. 55. P. 177–183.
7. *Подваальный С. Л., Провоторов В. В.* Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика, Информатика. Процессы управления*. 2015. Вып. 3. С. 126–142.
8. *Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitzskaya Yu. A.* Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2017. Т. 13. Вып. 3. С. 264–277. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.304
9. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p.
10. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V.* Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics // *Proc. 21st Mediterranean conference on Control and Automation*, June 25–28, 2013. Patanias-Chania, Crite, Greece, 2013. P. 622–627.
11. *Shorten R., Narendra K. S.* On the diagonal stability of a class of almost positive switched systems // *Proc. American Control Conference*, June 30–July 02, 2010. Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA, 2010. P. 6250–6255.
12. *Arcaat M., Sontag E.* Diagonal stability of a class of cyclic systems and its connection with the secant criterion // *Automatica*. 2006. Vol. 42, N 9. P. 1531–1537.
13. *Mason O., Shorten R.* On the simultaneous diagonal stability of a pair of positive linear systems // *Linear Algebra and its Applications*. 2006. Vol. 413. P. 13–23.
14. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // *IET Control Theory & Applications*. 2018. Vol. 12, N 6. P. 812–818.
15. *Shorten R., Narendra K.* On a theorem of Redheffer concerning diagonal stability // *Linear Algebra and its Applications*. 2009. Vol. 431. P. 2317–2329.
16. *Kraaijevanger J. F. B.* A characterisation of Lyapunov diagonal stability using Hadamard products // *Linear Algebra and its Applications*. 1991. Vol. 151. P. 245–254.
17. *Александров А. Ю.* Об абсолютной устойчивости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений // *Труды Всерос. науч. конференции «Математическое моделирование и краевые задачи»*. Самара, 26–28 мая 2004 г. Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2004. С. 13–15.
18. *Mason O.* Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems // *Systems and Control Letters*. 2012. Vol. 61. P. 6–10.
19. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal Riccati stability and applications // *Linear Algebra and its Applications*. 2016. Vol. 492. P. 38–51.
20. *Aleksandrov A., Mason O., Vorob'eva A.* Diagonal Riccati stability and the Hadamard product // *Linear Algebra and its Applications*. 2017. Vol. 534. P. 158–173.
21. *Александров А. Ю., Воробьева А. А.* Построение функционалов Ляпунова—Красовского для одного класса нелинейных систем с запаздыванием // *Процессы управления и устойчивость*. 2015. Т. 2 (18), № 1. С. 17–22.
22. *Красовский Н. Н.* О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздыванием времени // *Прикл. математика и механика*. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 315–327.
23. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. М.: Наука, 1965. 300 с.
24. *Britton N. F.* Essential mathematical biology. London; Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. 335 p.
25. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993. 458 p.
26. *Argunov A. V., Safronov V. M.* Demographic structure of siberian roe deer (*Capreolus pygargus* pall.) population in central Yakutia // *Russian Journal of Ecology*. 2013. Vol. 44, N 5. P. 402–407.
27. *Gallagher B. K., Secor D. H.* Intensified environmental and density-dependent regulation of white perch recruitment after an ecosystem shift in the Hudson river estuary // *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*. 2018. Vol. 75, N 1. P. 36–46.
28. *Novikov E. A., Panov V. V., Moshkin M. P.* Density-dependent regulation in populations of red-backed voles (*Myodes rutilus*) in optimal and suboptimal habitats of south-west Siberia // *Biology Bulletin Reviews*. 2012. Vol. 73, N 1. P. 49–58.
29. *Volkov S. V., Sharikov A. V., Basova V. B., Grinchenko O. S.* Influence of small mammals abundance on the number and selection of habitats by long-eared (*Asio otus*) and short-eared (*Asio flammeus*) owls // *Entomological Review*. 2009. Vol. 88, N 10. P. 1248–1257.
30. *Кожечкин В. В., Кельберг Г. В.* Влияние волка на изменение структуры популяции марала (*Cervus tlaplus sibiricus* sev) на территории заповедника Столбы // *Труды Тигирекского заповедника*. 2005. № 1. С. 307–310.

31. Sheremetev I. S., Rozenfeld S. B., Sipko T. P., Gruzdev A. R. Extinction of large herbivore mammals: niche characteristics of musk ox *Ovibos moschatus* and reindeer *Rangifer tarandus* coexisting in isolation // Biology Bulletin Reviews. 2014. Vol. 75, N 1. P. 62–73.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 30 января 2018 г.; принята к печати 15 марта 2018 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Воробьева Анна Алексеевна — магистрант; st012486@student.spbu.ru

Колпак Евгений Петрович — докт. физ.-мат. наук, профессор; petrovich_pmpu@mail.ru

On the diagonal stability of some classes of complex systems

A. Yu. Aleksandrov, A. A. Vorob'eva, E. P. Kolpak

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu., Vorob'eva A. A., Kolpak E. P. On the diagonal stability of some classes of complex systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 72–88. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.201>

The paper deals with the problem of diagonal stability of nonlinear difference-differential systems. Certain classes of complex systems with delay and nonlinearities of a sector type are studied. It is assumed that these systems describe the interaction of two-dimensional blocks with a delay in connections between the blocks. Two kinds of structure of connections are investigated. For every kind, necessary and sufficient conditions for the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals are found. The existence of such functionals guarantees the asymptotic stability of the zero solutions of considered systems for any nonnegative delay and any admissible nonlinearities. These conditions are formulated in terms of the Hurwitz property of specially constructed Metzler matrices. The proposed approaches are used for the stability analysis of some models of population dynamics. Generalized Lotka–Volterra models composed of several interacting pairs of predator-prey type are investigated. With the aid of the Lyapunov direct method and diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals, conditions are derived under which equilibrium positions of the considered models are globally asymptotically stable in the positive orthant of the state space for any nonnegative delay. An illustrative example and results of the numerical simulation are presented to demonstrate the effectiveness of the developed approaches.

Keywords: diagonal stability, complex system, delay, population dynamics, Lyapunov–Krasovskii functional.

References

1. Kaszkurewicz E., Bhaya A. *Matrix diagonal stability in systems and computation*. Boston, Basel, Berlin, Birkhauser Press, 1999, 267 p.
2. Pykh Yu. A. *Ravnovesie i ustojchivost' v modeljah populyacionnoj dinamiki* [Equilibrium and stability in models of population dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 182 p. (In Russian)
3. Berman A., Plemmons R. J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Philadelphia, SIAM, 1987, 361 p.
4. Barker G. P., Berman A., Plemmons R. J. Positive diagonal solutions to the Lyapunov equations. *Linear and Multilinear Algebra*, 1978, vol. 5, no. 4, pp. 249–256.
5. *Metod vektornykh funktsij Ljapunova v teorii ustojchivosti* [Method of vector Lyapunov functions]

- in stability theory]. Ed. by A. A. Voronov, V. M. Matrosov. Moscow, Nauka Publ., 1987, 312 p. (In Russian)
6. Sontag E. D. Passivity gains and the “secant condition” for stability. *Systems and Control Letters*, 2006, vol. 55, pp. 177–183.
 7. Podval'nyi S. L., Provotorov V. V. Startovoe upravlenie parabolicheskoy sistemoy s raspredelennymi parametrami na grafe [Start control of a parabolic system with distributed parameters on a graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 126–142. (In Russian)
 8. Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitkaya Yu. A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 264–277. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.304
 9. Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1998, 323 p.
 10. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V. Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics. *Proc. 21st Mediterranean conference on Control and Automation*, June 25–28, 2013. Patanias-Chania, Crite, Greece, 2013, pp. 622–627.
 11. Shorten R., Narendra K. S. On the diagonal stability of a class of almost positive switched systems. *Proc. American Control Conference*, June 30–July 02, 2010. Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA, 2010, pp. 6250–6255.
 12. Arcat M., Sontag E. Diagonal stability of a class of cyclic systems and its connection with the secant criterion. *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1531–1537.
 13. Mason O., Shorten R. On the simultaneous diagonal stability of a pair of positive linear systems. *Linear Algebra and its Applications*, 2006, vol. 413, pp. 13–23.
 14. Aleksandrov A., Mason O. Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay. *IET Control Theory & Applications*, 2018, vol. 12, no. 6, pp. 812–818.
 15. Shorten R., Narendra K. On a theorem of Redheffer concerning diagonal stability. *Linear Algebra and its Applications*, 2009, vol. 431, pp. 2317–2329.
 16. Kraaijevanger J. F. B. A characterisation of Lyapunov diagonal stability using Hadamard products. *Linear Algebra and its Applications*, 1991, vol. 151, pp. 245–254.
 17. Aleksandrov A. Yu. Ob absoljutnoj ustojchivosti odnoj nelinejnoj sistemy differencial'nyh uravnenij [On the absolute stability of a nonlinear system of differential equations]. *Proc. of All-Russian scientific conference “Mathematical Modeling and Boundary-Value Problems”*, Samara, May 26–28, 2004, pt 3. Samara, SamGU Publ., 2004, pp. 13–15. (In Russian)
 18. Mason O. Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems. *Systems and Control Letters*, 2012, vol. 61, pp. 6–10.
 19. Aleksandrov A., Mason O. Diagonal Riccati stability and applications. *Linear Algebra and its Applications*, 2016, vol. 492, pp. 38–51.
 20. Aleksandrov A., Mason O., Vorob'eva A. Diagonal Riccati stability and the Hadamard product. *Linear Algebra and its Applications*, 2017, vol. 534, pp. 158–173.
 21. Aleksandrov A., Vorob'eva A. Postroenie funkcionalov Ljapunova—Krasovskogo dlja odnogo klassa nelinejnyh sistem s zapazdyvaniem [Construction of Lyapunov—Krasovskii functionals for a class of nonlinear systems with delay]. *Control Processes and Stability*, 2015, vol. 2, no. 1, pp. 17–22. (In Russian)
 22. Krasovskii N. N. O primenenii vtorogo metoda Ljapunova dlja uravnenij s zapazdyvaniem vremeni [On the application of the second Lyapunov method for equations with time delay]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1956, vol. 20, iss. 3, pp. 315–327. (In Russian)
 23. Mishina A. P., Proskuryakov I. V. *Vysshaja algebra [Higher algebra]*. Moscow, Nauka Publ., 1965, 300 p. (In Russian)
 24. Britton N. F. *Essential mathematical biology*. London, Berlin, Heidelberg, Springer Press, 2003, 335 p.
 25. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. *Introduction to functional differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1993, 458 p.
 26. Argunov A. V., Safronov V. M. Demographic structure of siberian roe deer (*Capreolus pygargus* pall.) population in central Yakutia. *Russian Journal of Ecology*, 2013, vol. 44, no. 5, pp. 402–407.
 27. Gallagher B. K., Secor D. H. Intensified environmental and density-dependent regulation of white perch recruitment after an ecosystem shift in the Hudson river estuary. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 2018, vol. 75, no. 1, pp. 36–46.
 28. Novikov E. A., Panov V. V., Moshkin M. P. Density-dependent regulation in populations of red-backed voles (*Myodes rutilus*) in optimal and suboptimal habitats of south-west Siberia. *Biology Bulletin Reviews*, 2012, vol. 73, no. 1, pp. 49–58.
 29. Volkov S. V., Sharikov A. V., Basova V. B., Grinchenko O. S. Influence of small mammals

abundance on the number and selection of habitats by long-eared (*Asio otus*) and short-eared (*Asio flammeus*) owls. *Entomological Review*, 2009, vol. 88, no. 10, pp. 1248–1257.

30. Kozhechkin V. V., Kel'berg G. V. Vliyanie volka na izmenenie struktury populjacji marala (*Cervus tlaplus sibiricus* sev) na territorii zapovednika Stolby [Influence of the wolf on the change in the structure of the maral population (*Cervus tlaplus sibiricus* sev) in the territory of the Stolby reserve]. *Proceedings of the Tigirek Reserve*, 2005, no. 1, pp. 307–310. (In Russian)

31. Sheremetev I. S., Rozenfeld S. B., Sipko T. P., Gruzdev A. R. Extinction of large herbivore mammals: niche characteristics of musk ox *Ovibos moschatus* and reindeer *Rangifer tarandus* coexisting in isolation. *Biology Bulletin Reviews*, 2014, vol. 75, no. 1, pp. 62–73.

Author's Information:

Aleksandrov Alexander Yu. — Dr. Sci. in physics and mathematics, professor; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Vorob'eva Anna A. — master; st012486@student.spbu.ru

Kolpak Eugeny P. — Dr. Sci. in physics and mathematics, professor; petrovich_pmpu@mail.ru