УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2
MSC 26D15

Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. II

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Для цитирования: *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 233–243. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.204

Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1$$

и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. Установлено, что если множество «резонансных точек» этих функций не пусто и выполнено так называемое «резонансное условие», то всегда можно указать такие сколь угодно малые в смысле нормы возмущения $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, при которых множество резонансных точек функции $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ совпадает с множеством резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, но при этом

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Понятия «резонансная точка» и «резонансное условие» для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$, были введены автором в его предыдущих работах.

Ключевые слова: неравенство Гёльдера.

Введение. Предлагаемая статья представляет собой вторую, заключительную часть работы автора [1]. Она содержит формулировки и доказательства основных утверждений — теорем 3.1 и 3.2, анонсированных в [1], и посвящена вопросу неограниченности интеграла от произведения функций.

Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. Если

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

то согласно неравенству Гёльдера (см., например, [2, с. 232]) можем записать

$$\left| \int_{\mathbb{R}^1} \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant \prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}. \tag{1}$$

Если же

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1, \tag{2}$$

то произведение функций, стоящее под знаком интеграла в левой части неравенства (1), является функцией локально интегрируемой, но сам интеграл при этом может быть как ограничен, так и не ограничен.

Основное утверждение работы, составляющее содержание теорем 3.1 и 3.2 из § 3, состоит в следующем. Если числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, «резонансные множества» (определение 2.1) этих функций не пусты и выполнено «резонансное условие» (определение 3.1), то всегда можно указать такие сколь угодно малые в смысле нормы возмущения $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, при которых множество резонансных точек функции $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ совпадает с множеством резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, но при этом

$$\left\| \int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \left[\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)\right] d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Таким образом, утверждения теорем 3.1 и 3.2 показывают, что невыполнение резонансного условия является в определенном смысле необходимым для непрерывности L^∞-нормы интеграла от произведения функций, в предположении о «нерезонансном» возмущении сомножителей.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

- $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$;
- $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$;
- $\mathcal{R}_k$ — множество резонансных точек функции γ_k;
- $0 \in \sum\limits_{k=1}^m \mathcal{R}_k$ — резонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ приводится);
- $\dfrac{1}{s_k} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^m \dfrac{1}{p_j}, \quad \dfrac{1}{s_k} + \dfrac{1}{r_k} = 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$

Приведем некоторые обозначения и утверждения из первой части работы автора [1]. Для удобства сохранена нумерация цитированных примеров, лемм и в некоторых случаях — формул.

Пусть функция $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Обозначим преобразование Фурье этой функции через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} u(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^1)$ будем обозначать через $\widetilde{v}$. Оно имеет вид

$$\widetilde{v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} v(y)\, dy.$$

Обозначим также через $S(\mathbb{R}^1)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^1)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Следуя [3, с. 30–32], поставим в соответствие каждой комплекснозначной локально интегрируемой на прямой функции γ линейный непрерывный функционал, определяемый следующим образом:

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \overline{\gamma(t)}\varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^1).$$

Если $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, то, как известно (см., например, [4, с. 77]), функционал (γ, φ) принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^1)$.

Известно также [3, с. 213], что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^1)$, обозначаемый в соответствии с (3), через $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = 2\pi(f, \varphi)$.

В силу введенных выше обозначений, известные формулы принимают вид

$$\{\delta(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = 1(y), \quad \{\gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = \widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y),$$

$$\{\widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y)\}^{\widetilde{}}(\tau) = \gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau),$$

где δ — дельта-функция и $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^1)$.

Введем еще одно обозначение.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$ и число $\rho > 0$ столь мало, что $a + \rho < b - \rho$. Обозначим через $\Omega(\tau, [a, b], \rho)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = \frac{1}{\rho^2}\xi_{[a,b]}(y) * \xi_{[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]}(y) * \xi_{[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]}(y),$$

где $\xi_M(y)$ — характеристическая функция множества $M \subseteq \mathbb{R}^1$.

Нетрудно проверить справедливость соотношений

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = 0, \quad y \notin (a - \rho, b + \rho), \tag{4}$$

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = 1, \quad y \in [a + \rho, b - \rho], \tag{5}$$

$$\Omega(\tau, [a, b], \rho) \in L^p(\mathbb{R}^1), \quad p \in [1, +\infty]. \tag{6}$$

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b$.

Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$.

Определение 2.1. Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ называется *нерезонансной точкой* функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ называются *резонансными точками* функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Таким образом, согласно определению 2.1 нерезонансные точки определяются для функций, принадлежащих каким-либо пространствам $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $p_1 \in (1, +\infty]$, причем p_1 и p могут быть различными. Отметим также, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 2.1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 2.1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Отметим некоторые свойства множества резонансных точек.

Лемма 2.1. *Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$ и функция $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, тогда:*

1) для любого $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{R}\{c\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}; \tag{7}$$

2) для любых функций $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ выполняется включение

$$\mathcal{R}\{\gamma_1 + \gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \tag{8}$$

Следующий пример показывает, что координаты резонансных точек тригонометрических многочленов относительно любых пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$, являются частотами (или показателями Фурье) этих многочленов.

Пример 2.1. Пусть $\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k \tau}$, где $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $p \in (1, +\infty]$ выполняется равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\lambda_k\}.$$

Пример 2.3. Пусть числа $p, s \in (1, +\infty]$, $\delta > 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$; $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и функция

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\lambda\tau}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\lambda\}. \tag{9}$$

Пример 2.5. Пусть числа $p, s \in (1, +\infty]$ и $\delta > 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$; $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\mu \neq 0$ и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\lambda\tau} e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}. \tag{10}$$

Приведенные утверждения мы будем использовать в следующем параграфе при доказательстве основных результатов работы, сформулированных в [1].

§ 3. Оценка интеграла от произведения функций. Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству (2) и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. В этом параграфе для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$ при $p \in (1, +\infty]$ вводится понятие «резонансное условие» (определение 3.1), являющееся (замечание 3.1) аналогом соответствующего понятия из классической теории резонанса. Затем, используя этот термин, формулируются теоремы 3.1, 3.2 об условиях неограниченности интеграла

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau.$$

Введем некоторые обозначения и определения.

Определим (см. [1]) на $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ операцию сложения следующим образом. *Суммой* элементов $\omega_1, \omega_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ будем называть элемент из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$, обозначаемый $\omega_1 + \omega_2$ и определяемый для конечных элементов как обычно, а в остальных случаях по правилам:

1) выражение $\infty + \infty$ не определено;

2) $\omega + \infty = \infty, \quad \omega \in \mathbb{R}^1$.

Введенную таким образом операцию будем предполагать коммутативной и ассоциативной, сумму более чем трех слагаемых определять индуктивно и при этом выражение, содержащие более одного символа ∞, считать не имеющим смысла.

Для $A, B, \ldots, C \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}^1$ положим

$$A + B + \ldots + C = \{x \,|\, x = a + b + \ldots + c,\ a \in A,\ b \in B\ ,\ldots,\ c \in C\}.$$

Сумма множеств считается определенной, если определены соответствующие суммы элементов этих множеств.

Пусть

$$\frac{1}{s_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{p_j}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

причем, если $p_j = \infty,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ j \neq k$, то $s_k = \infty$.

При каждом $k = 1, 2, \ldots, m$ обозначим $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$.

Определение 3.1. Будем говорить, что для функций $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ с непустыми резонансными множествами выполнено *резонансное условие*, если не менее двух множеств из $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m$ содержат бесконечную точку или если среди резонансных множеств не более одного имеют бесконечную точку и выполнено резонансное соотношение

$$0 \in \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k. \tag{11}$$

Замечание 3.1. Если γ_1 и γ_2 — это тригонометрические многочлены, то резонансное соотношение превращается в соответствии с результатом из примера 2.1 в арифметическое соотношение между частотами этих многочленов, фигурирующее в классической теории резонанса.

Лемма 3.1. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2); функции $\varkappa_k,\ \gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1),\ 1 \leqslant k \leqslant m$; каждое из резонансных множеств $\mathcal{R}\{\varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$ состоит из единственной (конечной или бесконечной) точки и удовлетворяет условию*

$$\mathcal{R}\{\varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\},\ \ 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{12}$$

Тогда, если неограничен интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \varkappa_k(\tau)\, d\tau,$$

то существует $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что для любого* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *можно указать числа* $\varepsilon_k \in \{0, \varepsilon\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *при которых будет неограничен интеграл*

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \varepsilon_k \varkappa_k(\tau)]\, d\tau \tag{13}$$

и будут выполняться равенства

$$\mathcal{R}\{\gamma_k + \varepsilon_k \varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{14}$$

а индексы k, *при которых* $\varepsilon_k \neq 0$, *можно выбрать не зависящими от* ε.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого набора чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{0, \varepsilon\}$ имеем

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \big[\gamma_k(\tau) + \varepsilon_k \varkappa_k(\tau)\big]\, d\tau = \int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau)\, d\tau + \sum_{\lambda=1}^m \varepsilon_\lambda \int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\lambda}}^m \gamma_k(\tau)\Bigg] \varkappa_\lambda(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda,\,\mu=1 \\ \lambda<\mu}}^m \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu \int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\lambda,\,\mu}}^m \gamma_k(\tau)\Bigg] \varkappa_\lambda(\tau) \varkappa_\mu(\tau)\, d\tau + \ldots + \Bigg[\prod_{\nu=1}^m \varepsilon_\nu\Bigg]\Bigg[\int\limits_0^t \prod_{\nu=1}^m \varkappa_\nu(\tau)\, d\tau\Bigg]. \tag{15}$$

Если первое слагаемое из правой части (15) неограничено, то, полагая $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = 0$, получаем, что интеграл (13) неограничен. Если же первое слагаемое ограничено, но неограничен, например, какой-либо интеграл

$$\int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\lambda}}^m \gamma_k(\tau)\Bigg] \varkappa_\lambda(\tau)\, d\tau$$

из первой суммы, стоящей в правой части (15) при коэффициенте ε_λ, то, полагая $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{\lambda-1} = \varepsilon_{\lambda+1} = \ldots = \varepsilon_m = 0$, $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$, опять имеем неограниченность интеграла (13). Если первый интеграл и все интегралы из первой суммы ограничены, но неограничен какой-либо интеграл из второй суммы, например, при коэффициенте $\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu$, то, полагая $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\mu = \varepsilon$, а остальные коэффициенты равными нулю, опять имеем неограниченность интеграла (13). Рассуждая аналогичным образом и далее, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует набор чисел $\varepsilon_k \in \{0, \varepsilon\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, обеспечивающий неограниченность интеграла (13), а индексы k, при которых $\varepsilon_k \neq 0$, не зависят от величины ε.

Теперь покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$, для которого при любом $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ вдобавок выполняется (14). Пусть указанным выше способом выбран набор чисел $0 \leqslant \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \leqslant \varepsilon$, при котором неограничен интеграл (13). Обозначим $\{y_k\} = \mathcal{R}\{\varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$. В силу (7), (8) и (12) при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ выполняется включение

$$\mathcal{R}\{\gamma_k + \varepsilon_k \varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}. \tag{16}$$

Если при каком-либо $1 \leqslant k \leqslant m$, где $\varepsilon_k \neq 0$, соотношение (16) не является равенством, то существует точка

$$u_k \in \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}, u_k \notin \mathcal{R}\{\gamma_k + \varepsilon_k \varkappa_k, \quad L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}. \tag{17}$$

Это означает, что существует окрестность V точки u_k, в которой функция $\{\gamma_k(\tau)+\varepsilon_k \varkappa_k(\tau)\}\widehat{\ }(y)$ совпадает с преобразованием Фурье какой-нибудь функции из $L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$, где $\frac{1}{s_k}+\frac{1}{r_k}=1$.

Пусть $|u_k|<+\infty$. Выберем число $\rho>0$ столь малым, чтобы $\operatorname{supp}\widehat{\Omega}(y,[u_k-2\rho,u_k+2\rho],\rho)\subset V$ (это возможно в силу (4) и (5)), тогда, как следует из (6), $\Omega(\tau,[u_k-2\rho,u_k+2\rho],\rho)\in L^1(\mathbb{R}^1)$ и в силу неравенства Юнга (см., например, [5, с. 42]), получаем

$$\{\gamma_k(\tau)+\varepsilon_k\varkappa_k(\tau)\}*\Omega(\tau,[u_k-2\rho,u_k+2\rho],\rho)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1). \tag{18}$$

Если $y_k\neq u_k$, то число ρ можно взять столь малым, что $\varkappa_k(\tau)*\Omega(\tau,[u_k-2\rho,u_k+2\rho],\rho)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$, поскольку y_k — единственная резонансная точка. Но тогда из (18) получаем, что $\gamma_k(\tau)*\Omega(\tau,[u_k-2\rho,u_k+2\rho],\rho)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$. А это невозможно, так как u_k — резонансная точка функции $\gamma_k(\tau)$. Следовательно, $u_k=y_k$ и можно указать число $\rho_k>0$, при котором выполняется соотношение

$$\{\gamma_k(\tau)+\varepsilon_k\varkappa_k(\tau)\}*\Omega(\tau,[y_k-2\rho_k,y_k+2\rho_k],\rho_k)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1). \tag{19}$$

Если число ε_k, для которого выполняется (19), существует, то оно единственно. Действительно, пусть $\varepsilon'_k\neq\varepsilon_k$ и

$$\{\gamma_k(\tau)+\varepsilon'_k\varkappa_k(\tau)\}*\Omega(\tau,[y_k-2\rho_k,y_k+2\rho_k],\rho_k)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1). \tag{20}$$

Тогда из (19) и (20) получаем, что $(\varepsilon_k-\varepsilon'_k)\varkappa_k(\tau)*\Omega(\tau,[y_k-2\rho_k,y_k+2\rho_k],\rho_k)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$, то есть точка u_k — нерезонансная, а это противоречит (17).

Пусть $u_k=\infty$. Тогда можно указать число $\Delta>0$ такое, что

$$\{\gamma_k(\tau)+\varepsilon_k\varkappa_k(\tau)\}*\{\delta(\tau)-\Omega(\tau,[-\Delta,\Delta],1)\}\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1). \tag{21}$$

Если $y_k\neq u_k$ (то есть y_k конечно), то число Δ можно выбрать столь большим, чтобы вдобавок выполнялось соотношение $\varkappa_k(\tau)*\{\delta(\tau)-\Omega(\tau,[-\Delta,\Delta],1)\}\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$. Но тогда из (21) получаем, что $\gamma_k(\tau)*\{\delta(\tau)-\Omega(\tau,[-\Delta,\Delta],1)\}\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$, то есть $\infty\notin\mathcal{R}\{\gamma_k,L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$, что противоречит (17). Следовательно, в этом случае $y_k=u_k=\infty$. Выберем число $\Delta>0$, при котором выполняется (21). Если число ε_k, для которого выполняется (21), существует, то оно единственно. Действительно, пусть $\varepsilon'_k\neq\varepsilon_k$ и

$$\{\gamma_k(\tau)+\varepsilon'_k\varkappa_k(\tau)\}*\{\delta(\tau)-\Omega(\tau,[-\Delta,\Delta],1)\}\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1). \tag{22}$$

Тогда из (21) и (22) получаем, что $(\varepsilon_k-\varepsilon'_k)\varkappa_k(\tau)*\{\delta(\tau)-\Omega(\tau,[-\Delta,\Delta],1)\}\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$, то есть точка $y_k=\infty$ не является резонансной для $\varkappa_k$. А это противоречит предположению.

Следовательно, имеется не более, чем m чисел ε_1, ..., ε_m, для которых не выполняется какое-либо из соотношений (14). Но тогда, если в (13) потребовать $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0<\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\}$, то (14) будет выполняться. □

Теорема 3.1. *Пусть $m\geqslant 2$, числа $p_1,\dots,p_m\in(1,+\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1\in L^{p_1}(\mathbb{R}^1),\dots,\gamma_m\in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, резонансные множества $\mathcal{R}_k\neq\varnothing$, $1\leqslant k\leqslant m$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку и выполнено резонансное соотношение (11). Тогда для любого $\rho>0$ можно указать такие* *возмущения* $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *удовлетворяющие при каждом* $1 \leqslant k \leqslant m$ *условиям*

$$\mathcal{R}\{\gamma_k + \Delta\gamma_k,\ L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma_k,\ L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{s_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \frac{1}{p_j}, \tag{23}$$

$$\|\Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} < \rho, \tag{24}$$

при которых возмущенный интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau$$

будет неограничен.

Доказательство. В силу выполнения резонансного соотношения и правил сложения в $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ можно указать по крайней мере один набор конечных точек $y_1 \in \mathcal{R}_1, \ldots, y_m \in \mathcal{R}_m$, для которого

$$0 = y_1 + \ldots + y_m.$$

Так как числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), то можно указать такие числа $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} + \sum_{k=1}^m \delta_k < 1. \tag{25}$$

При каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ обозначим

$$\varkappa_k(\tau) = \frac{e^{iy_k\tau}}{(1 + |\tau|)^{1/p_k + \delta_k}},$$

тогда согласно (9) будем иметь $\mathcal{R}\{\varkappa_k,\ L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \{y_k\}$.

Так как в силу (25) интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \varkappa_k(\tau) d\tau$$

неограничен, то по лемме 3.1 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ можно указать числа $\varepsilon_k \in \{0, \varepsilon\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, при которых будет неограничен возмущенный интеграл (13) и будет выполняться (23), причем согласно лемме 3.1 индексы k, при которых $\varepsilon_k \neq 0$, будут одними и теми же при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Пусть $\rho > 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, чтобы выполнялись неравенства $\|\varepsilon_0\varkappa_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} < \rho$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и положим $\Delta\gamma_k = \varepsilon_k\varkappa_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, тогда будет выполняться и (24). $\square$

Теорема 3.2. *Пусть* $m \geqslant 2$, *числа* $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ *удовлетворяют условию (2), функции* $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, *резонансные множества* $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *и по крайней мере два из них содержат бесконечную точку. Тогда* *для любого $\rho > 0$ можно указать такие возмущения $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, удовлетворяющие при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ условиям*

$$\mathcal{R}\{\gamma_k + \Delta\gamma_k,\ L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma_k,\ L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}, \quad \textit{где} \quad \frac{1}{s_k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} \frac{1}{p}, \tag{26}$$

$$\|\Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} < \rho, \tag{27}$$

при которых будет неограничен возмущенный интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau.$$

Доказательство. Так как числа $p_1, \ldots, p_m$ удовлетворяют условию (2), можно указать такие $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} + \sum_{k=1}^m \delta_k < 1. \tag{28}$$

По условию теоремы не менее двух резонансных множеств содержат бесконечную точку. Рассмотрим два случая.

1. Все резонансные множества содержат бесконечную точку. Положим

$$\varkappa_k(\tau) = \frac{e^{i\tau^2}}{(1+|\tau|)^{1/p_k+\delta_k}},\ 1 \leqslant k \leqslant m-1, \quad \varkappa_m(\tau) = \frac{e^{-i(m-1)\tau^2}}{(1+|\tau|)^{1/p_m+\delta_m}}.$$

Тогда, очевидно, $\varkappa_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и согласно (10) имеем $\mathcal{R}\{\varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}$. Так как в силу (28) интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \varkappa_k(\tau) d\tau$$

неограничен, то по лемме 3.1 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ можно указать числа $\varepsilon_k \in \{0, \varepsilon\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, при которых будет неограничен интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \varepsilon_k\varkappa_k(\tau)] d\tau,$$

причем согласно лемме 3.1 индексы k, при которых $\varepsilon_k \neq 0$, будут одними и теми же при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Пусть $\rho > 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, чтобы вдобавок выполнялись неравенства $\|\varepsilon_0\varkappa_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} < \rho$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и положим $\Delta\gamma_k = \varepsilon_k\varkappa_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, откуда по лемме 3.1 и будет следовать (26) и (27).

2. Среди резонансных множеств $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m$ имеется $2 \leqslant l < m$, содержащих бесконечную точку, а остальные множества не пусты, но бесконечных точек не содержат. Изменив в случае необходимости нумерацию, будем считать, что

$\infty \in \mathcal{R}_1, \ldots, \infty \in \mathcal{R}_l$, $\infty \notin \mathcal{R}_{l+1}, \ldots, \infty \notin \mathcal{R}_m$. Так как все резонансные множества не пусты, можно указать конечные точки $y_{l+1} \in \mathcal{R}_{l+1}, \ldots, y_m \in \mathcal{R}_m$. Положим $y_0 = y_{l+1} + \ldots + y_m$,

$$\varkappa_k(\tau) = \frac{e^{i\tau^2}}{(1+|\tau|)^{1/p_k+\delta_k}},\ 1 \leqslant k \leqslant l-1, \quad \varkappa_l(\tau) = \frac{e^{-i(l-1)\tau^2} e^{-iy_0\tau}}{(1+|\tau|)^{1/p_l+\delta_l}},$$

$$\varkappa_n(\tau) = \frac{e^{iy_n\tau}}{(1+|\tau|)^{1/p_n+\delta_n}},\ l+1 \leqslant n \leqslant m.$$

Тогда по лемме 2.3 получаем

$$\begin{array}{ll} \mathcal{R}\{\varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}, & 1 \leqslant k \leqslant l, \\ \mathcal{R}\{\varkappa_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\} = \{y_k\}, & l+1 \leqslant k \leqslant m. \end{array}$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m \varkappa_k(\tau) d\tau = \int\limits_0^t \left[\prod_{k=1}^{l-1} \frac{e^{i\tau^2}}{(1+|\tau|)^{1/p_k+\delta_k}}\right] \frac{e^{-i(l-1)\tau^2} e^{-iy_0\tau}}{(1+|\tau|)^{1/p_l+\delta_l}} \left[\prod_{k=l+1}^{m} \frac{e^{iy_k\tau}}{(1+|\tau|)^{1/p_k+\delta_k}}\right] d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(1+|\tau|)^{\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} + \sum_{k=1}^m \delta_k}} d\tau$$

в силу (28) неограничен, то по лемме 3.1 можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ будет неограничен интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \varepsilon_k \varkappa_k(\tau)] d\tau,$$

где $\varepsilon_k \in \{0, \varepsilon\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и будет выполняться (26). Выберем $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, чтобы вдобавок выполнялись условия

$$\|\varepsilon_0 \varkappa_k(\tau)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} < \rho, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

и положим $\Delta\gamma_k(\tau) = \varepsilon_k \varkappa_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда будет выполняться также и (27). $\square$

Автор выражает глубокую признательность проф. Широкову Н. А. за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. I // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5(63). Вып. 1. С. 65–73.

2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.

3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: ФМ, 1959.

4. Функциональный анализ. Серия: Справочная математическая библиотека / под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.

5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Иванов Борис Филиппович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ivanov-bf@yandex.ru

On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. II

B. F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Higher School of Technology and Energy, ul. Ivana Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095, Russian Federation

For citation: Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 233–243. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.204

Let $m \geqslant 2$, numbers $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ satisfy inequality

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1,$$

and functions $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. We prove that if the set of "resonance points" of each of these functions is not empty and so-called "resonance condition" holds too then there exist such arbitrary small (low norm) perturbations $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ that the resonance set of the function $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ coincides with the resonance set of the function γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, but at the same time

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Concepts of a "resonance point" and of a "resonance condition" for functions from the spaces $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$, were introduced by the author in his earlier papers.

Keywords: Hölder inequality.

References

1. Ivanov B. F., "On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. I", *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5(63)**, issue 1, 65–73 (2018) [in Russian].

2. Bourbaki N., *Integration. Measures, integrations of measures* (Nauka Publ., Moscow, 1967) [in Russian].

3. Gelfand I. M., Shilov G. E., *The generalized functions and operations over them, the issue 1* (PhM Publ., Moscow, 1959) [in Russian].

4. *Functional analysis.* In Ser. *The reference mathematical library* (ed. by S. G. Krein, Nauka Publ., Moskow, 1972) [in Russian].

5. Steyn I., Weiss G., *Introduction to the harmonious analysis on Euclidean spaces* (Mir Publ., Moskow, 1974) [in Russian].

Author's information:

Boris F. Ivanov — ivanov-bf@yandex.ru