ВРАЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Л. С. Шихобалов

Математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, дом 28, Россия
E-mail: laur3@yandex.ru

Известно, что воздействие магнитного поля на электрон приводит к прецессии его спина. Однако, если описывать это воздействие в рамках пространства Минковского, то оказывается, что результатом воздействия является не прецессия спина электрона, а вращение электрона с угловой скоростью $-(e/mc)\mathbf{H}$, которая соответствует опытным данным (e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля).

1. ВВЕДЕНИЕ

Дж. Уленбек и С. Гаудсмит в работе [1], опубликованной в 1925 г., ввели понятие спина электрона и, пользуясь представлением о прецессии спина в магнитном поле, объяснили ряд экспериментальных результатов по воздействию магнитного поля на вещество. Это объяснение является с тех пор общепринятым. Однако при описании воздействия магнитного поля на электрон в рамках пространства Минковского оказывается, что результатом воздействия является не прецессия спина электрона, а вращение электрона.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Модели материальных тел и законы динамики в классической механике и в специальной теории относительности принципиально различны. В классической механике простейшей моделью тела является геометрическая точка, воздействие на которую описывается вектором (вектором силы). В специальной теории относительности воздействие, по крайней мере электромагнитное, описывается двухвалентным тензором. Тензор не может действовать на точку, а только на вектор. Поэтому простейшей моделью тела (в частности, элементарной частицы) является в специальной теории относительности не точка, а точка вместе со скрепленными с ней векторами. Подчеркнем, что это факт, вытекающий непосредственно из свойств тензоров.

Учитывая сказанное, будем считать, что с материальной точкой скреплено множество векторов, имеющих начала в этой точке. Движение и вращение такой конструкции и будем исследовать. Далее под *материальной точкой* понимается как сама точка (когда речь идет о ее местоположении или мировой линии), так и вся указанная геометрическая конструкция (когда рассматривается ее вращение).

Итак, в классической механике воздействие на тело, моделируемое материальной точкой, задается вектором силы, приложенным к точке и вызывающим ее ускорение. В специальной теории относительности воздействие задается тензором, поворачивающим векторы, скрепленные с материальной точкой. Воздействие на 4-скорость материальной точки $\mathbf{i}$ (единичный касательный вектор к мировой линии) приводит к его повороту, что влечет искривление мировой линии. В опыте это проявляется как ускорение тела. Воздействие на другие векторы, скрепленные с материальной точкой, приводит к тому, что их составляющие, ортогональные вектору $\mathbf{i}$, поворачиваются вокруг $\mathbf{i}$ (то есть вокруг мировой линии). Это означает вращение тела. Отметим, что при описании вращения тела в принципе невозможно моделировать его геометрической точкой, так как вращающаяся точка неотличима от невращающейся.

Общим в классической механике и в специальной теории относительности является тот факт, что при отсутствии воздействия на тело его движение является прямолинейным.

Рассмотрим электрон в пространстве Минковского M. Будем моделировать его материальной точкой (со скреплёнными с ней векторами).

Уравнение движения электрона в электромагнитном поле, как известно [2] (§ 23), имеет вид

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к мировой линии L (4-скорость электрона); l — натуральный параметр на L ($l = ct'$, c — скорость света; t' — собственное время электрона); $a_1 = e/(mc^2)$; e и m — электрический заряд и масса электрона ($e < 0$, $m > 0$); F — тензор электромагнитного поля; точка — знак скалярного умножения.

Распространим уравнение (2.1) на все векторы, скрепленные с материальной точкой. В результате получаем *закон движения и вращения* электрона:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{u}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, скрепленный с материальной точкой; остальные обозначения те же, что в (2.1).

Уравнение движения электрона (2.1) является частным случаем закона (2.2) при $\mathbf{u} = \mathbf{i}$. Уравнение (2.1) исследовано во многих работах (например, в [3, 4]), поэтому не будем останавливаться на нем. Нас будет интересовать *вращение* электрона, описываемое законом (2.2).

Отметим, что закон (2.2) может быть обобщен на другие элементарные частицы и материальные тела, а также на случай воздействия, имеющего не электромагнитную природу. Для этого нужно заменить в нем тензор $a_1 F$ соответствующим тензором. В общем случае основной закон динамики материальной точки в теории относительности имеет форму

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = K \cdot \mathbf{u}, \tag{2.3}$$

где K — двухвалентный антисимметричный тензор, характеризующий воздействие на материальную точку; $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, скрепленный с материальной точкой.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Будем использовать математический аппарат и обозначения, принятые в механике [5 – 7] и др.

Тензор второго ранга (далее просто тензор) есть конечная сумма вида

$$\alpha\mathbf{ab} + \beta\mathbf{cd} + \ldots + \omega\mathbf{yz}, \tag{3.1}$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ — числа; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{z}$ — векторы; $\mathbf{ab}, \mathbf{cd}, \ldots, \mathbf{yz}$ — тензорные произведения векторов; тензорное умножение — ассоциативная, некоммутативная, линейная по каждому сомножителю операция, обозначаемая в механике без символа умножения (в математической литературе она обозначается знаком $\otimes$, например, $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$). Простейший тензор имеет вид $\mathbf{ab}$ и называется *диадой*. Подчеркнем, что тензор, как и вектор, — математический объект, не зависящий от систем отсчета и систем координат.

Тензор A^*, получающийся в результате перемены местами векторов в каждой из диад, образующих тензор A, именуется тензором, *транспонированным* или *сопряженным* к тензору A. Например, тензор, транспонированный к тензору (3.1), есть $\alpha\mathbf{ba}+\beta\mathbf{dc}+\ldots+\omega\mathbf{zy}$. Тензор A называется *симметричным*, если $A^*=A$, и называется *антисимметричным* или *кососимметричным*, если $A^*=-A$. Так, тензор $\mathbf{ab}+\mathbf{ba}$ симметричный, а тензор $\mathbf{ab}-\mathbf{ba}$ антисимметричный. Антисимметричные тензоры называются *бивекторами*.

Скалярное умножение тензора на вектор и на тензор производится по правилу, ясному из следующих примеров:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\mathbf{ab}+\beta\mathbf{cd})\cdot\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})+\beta\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}+\beta(\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})\mathbf{c};\\
(\alpha\mathbf{ab}+\beta\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{yz}) &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}+\beta\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z} = \\
&= \alpha(\mathbf{b}\cdot\mathbf{y})\mathbf{az}+\beta(\mathbf{d}\cdot\mathbf{y})\mathbf{cz},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}, \mathbf{d}\cdot\mathbf{u},\ldots,\mathbf{d}\cdot\mathbf{y}$ — скалярные произведения векторов (числа). Скалярное произведение тензора на вектор есть вектор. Скалярное произведение двух тензоров — тензор.

Тензор A порождает линейный оператор, действующий на векторы в соответствии с законом:

$$A(\mathbf{u}) = A\cdot\mathbf{u} \quad \text{для всех векторов } \mathbf{u}. \tag{3.3}$$

Пространство тензоров и пространство операторов изоморфны, причем суперпозиция операторов соответствует скалярному произведению тензоров. Благодаря этому, понятия тензора и оператора могут использоваться как синонимы.

Тензор I, определяемый законом: $I\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ для любого вектора $\mathbf{u}$, называется *единичным*, *метрическим* или *фундаментальным* тензором (или *тождественным* оператором). Он может быть определен также эквивалентным законом: $A\cdot I = I\cdot A = A$ для любого тензора A.

Тензор A называется *особенным* или *вырожденным*, если существует вектор $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ такой, что $A\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$ (где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор). Тензор A называется *неособенным* или *невырожденным*, если он не является особенным. Неособенные тензоры переводят векторное пространство размерности n в пространство той же размерности; особенные тензоры переводят его в пространство размерности меньшей n.

Тензор A^{-1} называется *обратным* к тензору A, если

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I;$$

обратный тензор имеют только неособенные тензоры.

Тензор (оператор) A называется *ортогональным*, если он не меняет скалярные произведения векторов. Согласно (3.3), это означает выполнение условия

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \text{ для всех векторов } \mathbf{u}, \mathbf{v}.$$

Тензор A является ортогональным тогда и только тогда, когда

$$A^* = A^{-1},$$

где A^* — тензор, транспонированный к A; A^{-1} — тензор, обратный к A.

Пространство Минковского M есть четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(+---)$.

Инерциальная система отсчета в пространстве M представляет собой пару $\{T,\, \Gamma\}$, где T — ось времени — неподвижная относительно M времениподобная прямая, вдоль которой отсчитывается координатное время t (ct — натуральный параметр на T); Γ — физическое пространство — трехмерная гиперплоскость, ортогональная к оси T и движущаяся вдоль нее поступательно в направлении от прошлого к будущему (конкретный вид системы координат в Γ зачастую не имеет значения). Так определенная инерциальная система отсчета $\{T,\, \Gamma\}$ служит математической моделью м а т е р и а л ь н о й инерциальной системы отсчета, используемой в опыте, при этом ось времени T является мировой линией центра масс тела отсчета.

Пусть некоторому телу соответствует в пространстве Минковского M мировая линия L. Она неподвижна относительно M, поэтому при движении в M физического пространства Γ точка пересечения с ним мировой линии L прочерчивает в Γ некоторую кривую. Эта кривая называется *траекторией* материальной точки. Именно ее прообраз в реальном мире, также называемый траекторией, мы определяем в опыте. Мировая линия, будучи фиксированной в пространстве M, не зависит от системы отсчета, траектория лежит в Γ и поэтому зависит от системы отсчета.

В инерциальной системе отсчета (в отличие от неинерциальной) траектория материальной точки совпадает с ортогональной проекцией мировой линии на физическое пространство Γ при любом его расположении в M, причем прямолинейной мировой линии соответствует прямолинейная траектория (обратное неверно, например, электрон, колеблющийся вдоль прямолинейной антенны, имеет прямолинейную траекторию, но волнообразную мировую линию).

Базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в пространстве Минковского называется *ортономированным*, если он удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1;$$
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

4. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Электромагнитное поле задается двухвалентным антисимметричным тензором электромагнитного поля F. Подчеркнем, что тензор F, как и всякий тензор, не зависит от системы отсчета.

Пусть $\{T, \mathit{\Gamma}\}$ — какая-либо инерциальная система отсчета, где T — ось времени; $\mathit{\Gamma}$ — физическое пространство — трехмерная гиперплоскость в пространстве Минковского M, ортогональная оси T и имеющая сигнатуру $(- - -)$. Тогда тензор F может быть представлен в форме

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \varkappa, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\overline{H}$ — напряженность магнитного поля ($\mathbf{E}$ — вектор, $\overline{H}$ — псевдовектор; $\mathbf{E}, \overline{H} \in \mathit{\Gamma}$); $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T, ориентированный в сторону будущего; $\varkappa$ — трехвалентный псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством $\mathit{\Gamma}$; черта над символом обозначает псевдовектор; тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между сомножителями (см. пояснение к формуле (3.1)). Напряженности $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$, в отличие от тензора F, зависят от системы отсчета.[1]

Псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ есть трехвалентный совершенно антисимметричный единичный псевдотензор, определяемый равенством

$$\varkappa = \vartriangle(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \tag{4.2}$$

[1] Согласно (4.1), величины F, $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ имеют одинаковую физическую размерность (так как $\boldsymbol{\tau}$ и $\varkappa$ безразмерны). Поэтому при решении задач электродинамики удобнее использовать систему физических единиц СГС, в которой размерности $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ одинаковы, а не СИ, в которой они различны.

где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортономированный базис в физическом пространстве $\mathit{\Gamma}$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = -1$,[2] $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$); $\vartriangle$ — единичный псевдоскаляр в $\mathit{\Gamma}$: $\vartriangle = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, и $\vartriangle = -1$, если базис левоориентированный. Псевдотензор $\varkappa$ имеет вид (4.2) в любом ортонормированном базисе пространства $\mathit{\Gamma}$.

Формула (4.1) выражает тензор электромагнитного поля F через напряженности $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$. Последние, в свою очередь, выражаются через тензор F посредством формул

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}; \qquad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot\cdot\, \varkappa,$$

где двоеточие — знак бискалярного умножения, которое выполняется по правилу, иллюстрируемому следующим примером:

$$\mathbf{ab} \cdot\cdot\, \mathbf{xyz} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{yz} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z},$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{z}$ — векторы; $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$ — скалярные произведения векторов (числа).

5. ВРАЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Пусть в инерциальной системе отсчета $\{T,\ \mathit{\Gamma}\}$ действует постоянное и однородное магнитное поле, а электрическое поле отсутствует:

$$\overline{H} = \mathrm{const} \neq \mathbf{0}; \qquad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор (он совпадает с нулевым псевдовектором).

Тогда, согласно (4.1) и (5.1), тензор электромагнитного поля F имеет вид:

$$F = \overline{H} \cdot \varkappa, \tag{5.2}$$

а уравнение движения электрона (2.1) принимает форму

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{i}. \tag{5.3}$$

Проанализируем простейший случай, когда центр масс электрона неподвижен относительно системы отсчета $\{T,\ \mathit{\Gamma}\}$. В этом случае мировая линия электрона L прямолинейна и параллельна оси времени T,

[2]Знак минус объясняется тем, что физическое пространство $\mathit{\Gamma}$ имеет сигнатуру $(- - -)$.

а единичный вектор $\mathbf{i}$, касательный к L, постоянен и совпадает с направляющим ортом $\boldsymbol{\tau}$ оси T; кроме того, в этом случае $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$ (ибо псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ определен над физическим пространством $\varGamma$ и $\mathbf{i} \perp \varGamma$; $\hat{0}$ — нулевой тензор). Из $\mathbf{i} = \mathrm{const}$ и $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$ следует, что уравнение движения (5.3) выполняется.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{u}$, скрепленный с материальной точкой. Он преобразуется в соответствии с законом (2.2). Подставим в (2.2) значение (5.2) тензора F:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{u}. \tag{5.4}$$

Решим уравнение (5.4). Начнем с того, что разложим вектор $\mathbf{u}$ на взаимно ортогональные составляющие, принадлежащие оси времени T и физическому пространству $\varGamma$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_\varGamma \qquad (\mathbf{u}_T \in T;\ \ \mathbf{u}_\varGamma \in \varGamma). \tag{5.5}$$

Векторы $\mathbf{u}_T$ и $\mathbf{u}_\varGamma$ могут быть найдены путем проецирования вектора $\mathbf{u}$ на ось T и на гиперплоскость $\varGamma$ с помощью тензоров (операторов) проецирования $\boldsymbol{\tau\tau}$ и $I - \boldsymbol{\tau\tau}$:

$$\mathbf{u}_T = (\boldsymbol{\tau\tau}) \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{u}_\varGamma = (I - \boldsymbol{\tau\tau}) \cdot \mathbf{u}, \tag{5.6}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T; $\boldsymbol{\tau\tau}$ — тензорное произведение вектора $\boldsymbol{\tau}$ на себя; I — единичный тензор (тождественный оператор).[3] Очевидно, что из (5.6) вытекает равенство $\mathbf{u}_T + \mathbf{u}_\varGamma = \mathbf{u}$.

Покажем, что векторы $\mathbf{u}_T$ и $\mathbf{u}_\varGamma$, определяемые формулами (5.6), принадлежат подпространствам T и $\varGamma$ соответственно. В самом деле, из цепочки равенств $\mathbf{u}_T = (\boldsymbol{\tau\tau}) \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\tau}$, в силу $\boldsymbol{\tau} \in T$, имеем: $\mathbf{u}_T \in T$ (здесь использовано правило (3.2) скалярного умножения тензора на вектор); из

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}_\varGamma = \boldsymbol{\tau} \cdot [(I - \boldsymbol{\tau\tau}) \cdot \mathbf{u}] = [\boldsymbol{\tau} \cdot (I - \boldsymbol{\tau\tau})] \cdot \mathbf{u} = (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$$

следует $\mathbf{u}_\varGamma \perp T$, значит, $\mathbf{u}_\varGamma \in \varGamma$.

[3] Линейный оператор P называется оператором проецирования или проектором, если $P^2 = P$. Операторы $\boldsymbol{\tau\tau}$ и $I - \boldsymbol{\tau\tau}$ являются проекторами, так как $(\boldsymbol{\tau\tau}) \cdot (\boldsymbol{\tau\tau}) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau\tau}$ и $(I - \boldsymbol{\tau\tau}) \cdot (I - \boldsymbol{\tau\tau}) = I - \boldsymbol{\tau\tau}$, где учтено, что $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $I \cdot I = I$ и $I \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot I = \boldsymbol{\tau}$.

Подставим разложение (5.5) вектора $\mathbf{u}$ в уравнение (5.4). С учетом равенства $\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{u}_T = \hat{0}$ (вытекающего из того, что псевдотензор $\boldsymbol{\varkappa}$ определен над Γ, $\mathbf{u}_T \in T$ и $\Gamma \perp T$) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dl} &= \frac{d\mathbf{u}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{u}_\Gamma}{dl} = a_1\overline{H}\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{u}_T + a_1\overline{H}\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{u}_\Gamma = \\ &= a_1\overline{H}\cdot\hat{0} + a_1\overline{H}\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{u}_\Gamma = a_1\overline{H}\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{u}_\Gamma = -a_1\overline{H}\times\mathbf{u}_\Gamma\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $\times$ — знак векторного умножения в Γ ($\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{b}$ для любых векторов и псевдовекторов $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Gamma$).

Умножим скалярно крайние части цепочки равенств (5.7) на тензор $\boldsymbol{\tau\tau}$. Пользуясь постоянством $\boldsymbol{\tau}$, определением (5.6) вектора $\mathbf{u}_T$ и ортогональностью векторов $\boldsymbol{\tau}\in T$ и $\overline{H}\times\mathbf{u}_\Gamma\in\Gamma$, можем записать:

$$(\boldsymbol{\tau\tau})\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dl} = \frac{d[(\boldsymbol{\tau\tau})\cdot\mathbf{u}]}{dl} = \frac{d\mathbf{u}_T}{dl} = -a_1(\boldsymbol{\tau\tau})\cdot(\overline{H}\times\mathbf{u}_\Gamma) = \mathbf{0},$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dl} = \mathbf{0}. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) находим:

$$\frac{d\mathbf{u}_\Gamma}{dl} = -a_1\overline{H}\times\mathbf{u}_\Gamma\,. \tag{5.9}$$

Так как в рассматриваемом случае мировая линия L параллельна оси времени T, то собственное время материальной точки $t' = l/c$ равняется (с точностью до постоянного слагаемого) координатному времени t, отсчитываемому вдоль оси T, следовательно, $dl = c\,dt$. Подстановка этого значения dl в (5.8) и (5.9) дает:

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \mathbf{0}; \tag{5.10}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\Gamma}{dt} = \overline{\Omega}_H\times\mathbf{u}_\Gamma\,, \tag{5.11}$$

где обозначено

$$\overline{\Omega}_H = -a_1 c\,\overline{H} = -\frac{e}{mc}\,\overline{H} \qquad (\overline{\Omega}_H\in\Gamma), \tag{5.12}$$

здесь применено равенство $a_1 = e/(mc^2)$; e и m — заряд и масса электрона ($e < 0$); черта над символом обозначает псевдовектор.

Уравнения (5.10) и (5.11) приводят к следующему выводу относительно действия магнитного поля на материальную точку, моделирующую электрон. Временнáя составляющая $\mathbf{u}_T$ произвольного вектора $\mathbf{u}$, скрепленного с материальной точкой, не изменяется. А пространственная составляющая $\mathbf{u}_\Gamma$ вращается с угловой скоростью $\overline{\Omega}_H$, одинаковой для всех векторов.

Изнутри трехмерного физического пространства Γ инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ полученный результат «выглядит» так: *пусть в физическом пространстве Γ находится электрон, центр масс которого неподвижен относительно Γ, тогда при действии на него магнитного поля с напряженностью $\overline{H}$ электрон вращается с угловой скоростью $\overline{\Omega}_H$ вида* (5.12) *вокруг оси, параллельной $\overline{H}$ и проходящей через его центр масс.* Этот результат соответствует экспериментальным данным. Аналогичным образом с помощью закона (2.3) может быть найдено вращение в магнитном поле других элементарных частиц и макроскопических тел.

6. О ЛАРМОРОВСКОЙ ПРЕЦЕССИИ СПИНА ЭЛЕКТРОНА

В настоящее время принято объяснять результаты опытов по воздействию магнитного поля на электроны ларморовской прецессией электронных спинов. Обоснуем отсутствие этой прецессии.

Известно, что под действием магнитного поля магнитный момент физической системы стремится повернуться в направлении поля. Электрон в атоме обладает двумя магнитными моментами — орбитальным и собственным, связанным со спином. Во внешнем магнитном поле $\overline{H}$ действующая на электрон магнитная составляющая силы Лоренца $(e/c)\mathbf{v}\times\overline{H}$ стремится изменить движение электрона таким образом, чтобы плоскость орбиты стала перпендикулярной полю и орбитальный магнитный момент оказался направленным вдоль поля. Но этому препятствует инерция. В результате «противоборства» инерции и силы Лоренца плоскость орбиты и орбитальный магнитный момент начинают прецессировать вокруг вектора $\overline{H}$ с угловой скоростью $\overline{\Omega}_L = -\frac{e}{2mc}\overline{H}$. Это — ларморовская прецессия орбитального магнитного момента электрона.

Иначе обстоит дело с собственным магнитным моментом электрона. Для изменения его направления в пространстве не требуется изменять траекторию движения электрона. Поэтому препятствовать его повороту может только инерция вращения электрона вокруг собственного центра, которая пренебрежимо мала по сравнению с инерцией орбитального движения.[4] Вследствие этого, собственный магнитный момент электрона $\overline{\mu}$ и вместе с ним спин $\overline{s}$ ориентируются во внешнем магнитном поле $\overline{H}$ параллельно полю. В силу $\overline{\mu} \parallel \overline{H}$, из уравнения моментов

$$\frac{d\overline{s}}{dt} = \overline{\mu} \times \overline{H}$$

вытекает $d\overline{s}/dt = \mathbf{0}$, откуда $\overline{s} = \mathrm{const}$, а это означает отсутствие прецессии спина. В механике подобная ситуация, при которой кинетический момент волчка (гироскопа) направлен точно по вертикали и прецессия отсутствует, называется спящим волчком. Более того, в отличие от случая с волчком, где вертикальное его положение является неустойчивым, ориентация магнитного момента $\overline{\mu}$ в направлении магнитного поля $\overline{H}$ является устойчивой, и при любом отклонении псевдовектора $\overline{\mu}$ от этого положения момент силы $\overline{\mu} \times \overline{H}$ возвращает его обратно. К тому же ларморовская угловая скорость прецессии в два раза меньше угловой скорости (5.12), согласующейся с опытом. В связи с этим нет оснований считать, что спины электронов прецессируют. К сожалению, экспериментальная техника пока что не позволяет непосредственно увидеть электрон и проверить, вращается сам электрон или имеет место прецессия его спина.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что при действии магнитного поля на электрон он вращается с угловой скоростью $\overline{\Omega}_H = -\frac{e}{mc}\overline{H}$. Это именно то значение угловой скорости, которое соответствует данным опытов. Отсутствие ларморовской прецессии спина электрона объясняется тем, что спин ориентируется в магнитном поле параллельно полю.

В следующей статье будет доказано на основе закона (2.2), что собственное вращение орбитальных электронов в атоме обусловлено действием на них электрического поля ядра, а не комбинацией ларморовской и томасовской прецессий, как это принято считать.

[4] Полагая электрон шаром с радиусом, равным так называемому классическому радиусу электрона r_e, получаем, что отношение момента инерции электрона относительно его центра $\frac{2}{5}mr_e^2$ к моменту инерции электрона относительно центра орбиты mr_B^2 (где r_B — боровский радиус) составляет примерно 10^{-9}.

ЛИТЕРАТУРА

1. G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, Nature **117**, 264 (1926).

2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, Наука, Москва (1973).

3. Ю.В. Новожилов, Ю.А. Яппа, Электродинамика, Наука, Москва (1978).

4. Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков, Электродинамика, Высш. шк., Москва (1990).

5. Л.И. Седов, Введение в механику сплошной среды, Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1962).

6. А.И. Лурье, Теория упругости, Наука, Москва (1970).

7. А.А. Вакуленко, Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике, Изд-во Ленингр. ун-та, Ленинград (1972).