

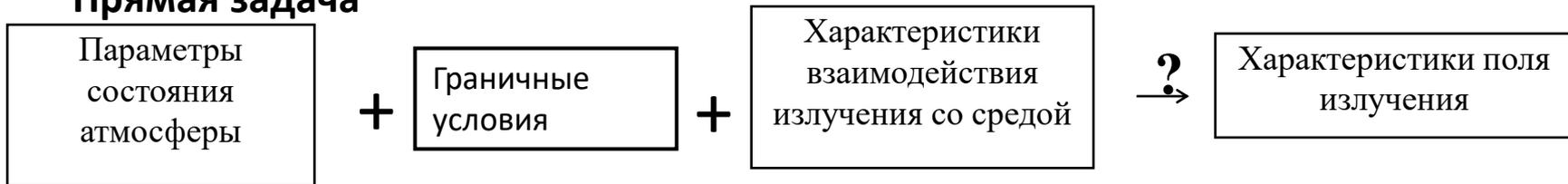
Слайды к курсам на тему

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ**

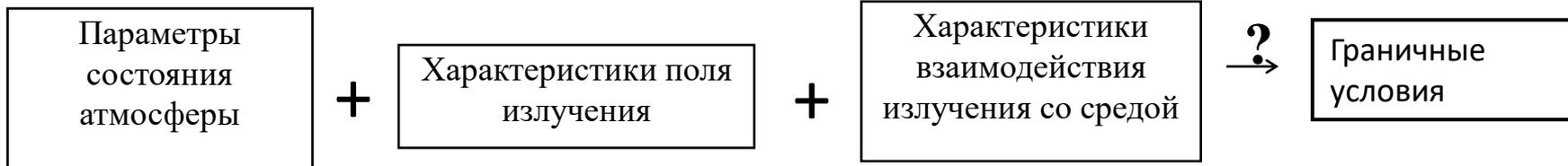
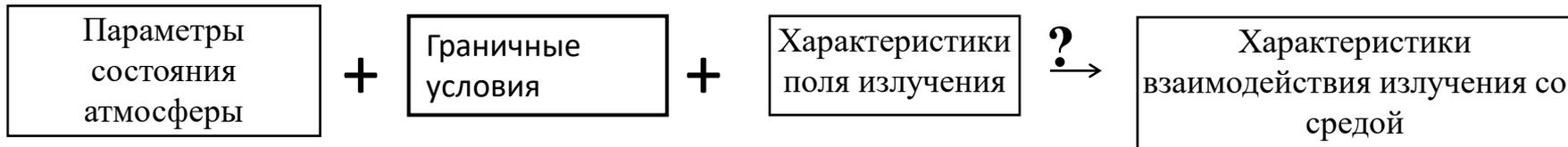
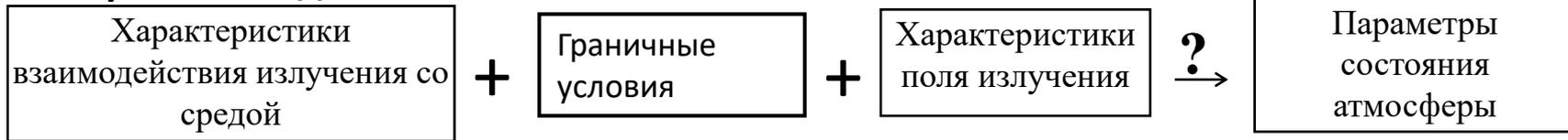
# Обратные задачи атмосферной оптики

*Задано или измерено* *Требуется определить*

## Прямая задача



## Обратные задачи



$$f(v) = \mathbf{A}(v, \varphi(s), B(v, s)), \quad (1.2-1)$$

где  $f(v)$  и  $\varphi(s)$  принадлежат некоторым функциональным пространствам  $\mathbf{F}$  и  $\Phi$ ,  $v$  и  $s$  вещественные числа (например,  $v$  – частота,  $s$  – пространственная переменная),  $\mathbf{A}$  – оператор, в общем случае нелинейный, действующий из  $\Phi$  в  $\mathbf{F}$ , – оператор прямой задачи

# Классификация дистанционных методов измерений атмосферных параметров

- по используемому излучению (природе излучения);
- по основным процессам взаимодействия излучения с исследуемой средой;
- по условиям освещения (времени суток);
- по области спектра;
- по определяемому параметру;
- по геометрии измерений;
- по используемому носителю или расположению прибора

# К л а с с и ф и к а ц и я   д и с т а н ц и о н н ы х   м е т о д о в и з м е р е н и й   а т м о с ф е р н ы х   п а р а м е т р о в

*– по используемому излучению (природе излучения);*

- Активные методы

- Пассивные методы

– методы собственного излучения атмосферы  
(равновесного и неравновесного);

– методы рассеянного излучения (солнечного);

– методы поглощения (прозрачности), прежде всего солнечного  
излучения (но и Луны и звезд);

– методы рефракции;

# К л а с с и ф и к а ц и я д и с т а н ц и о н н ы х м е т о д о в и з м е р е н и й а т м о с ф е р н ы х п а р а м е т р о в

*– по основным процессам взаимодействия излучения с исследуемой средой;*

методы:

- рассеяния (различных типов – молекулярного (релеевского),  
аэрозольного, комбинационного и т. д.),
- поглощения
- собственного излучения
- рефракции

# К л а с с и ф и к а ц и я   д и с т а н ц и о н н ы х   м е т о д о в и з м е р е н и й   а т м о с ф е р н ы х   п а р а м е т р о в

*по условиям освещения (времени суток)*

методы:

- дневные

- ночные

- в области терминатора

# К л а с с и ф и к а ц и я д и с т а н ц и о н н ы х м е т о д о в и з м е р е н и й а т м о с ф е р н ы х п а р а м е т р о в

## *по области спектра*

методы, использующие:

- ультрафиолетовую (УФ);
- видимую (ВИД);
- ближнюю инфракрасную (БИК);
- инфракрасную (ИК);
- микроволновую (МКВ);
- сантиметровую (СМ)

области спектра.

# К л а с с и ф и к а ц и я д и с т а н ц и о н н ы х м е т о д о в и з м е р е н и й а т м о с ф е р н ы х п а р а м е т р о в

## *по определяемому параметру*

- температуры, плотности и давления атмосферы;
- характеристик облаков – балльности, высоты верхней и нижней границ (вертикальной структуры), температуры верхней границы (В.Г.), водности, водозапаса, фазового состава, микрофизики облаков;
- интенсивности осадков;
- содержания поглощающих газов – водяного пара, озона и других малых газовых составляющих (МГС);
- поля ветра;
- характеристик аэрозолей
  
- Параметров поверхности:
  - температуры океанов и суши;
  - влажности почв;
  - оптических характеристик подстилающих поверхностей

# К л а с с и ф и к а ц и я   д и с т а н ц и о н н ы х   м е т о д о в и з м е р е н и й   а т м о с ф е р н ы х   п а р а м е т р о в

## *по расположению прибора / геометрии измерений*

методы:

- спутниковые /самолетные/ аэростатные
  - надирные
  - касательные (лимбовые)
- наземные
  - по прямому Солнцу
  - по зениту
  - по сканированию угла
  - по интегральному излучению неба

# Методы прозрачности

закон Бера–Бугера–Ламберта (закон ББЛ)

$$J(\nu) = J_0(\nu) \exp(-\tau(\nu, s_1, s_2)) \quad (1)$$

$$\tau(\nu, s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \sum_{i=1}^N k_i(\nu, s) \rho_i(s) ds + \tau_R(\nu, s_1, s_2) + \tau_a(\nu, s_1, s_2) \quad (2)$$

Определение:

- газового состава атмосферы
- температуры атмосферы
- скорости ветра
- плотности атмосферы
- характеристик атмосферных аэрозолей.

**Определение характеристик газового состава атмосферы методом прозрачности**

$$J(\nu) = J_0(\nu) \exp\left(-\int_{s_1}^{s_2} k(\nu, s) \rho(s) ds\right) \quad (3)$$

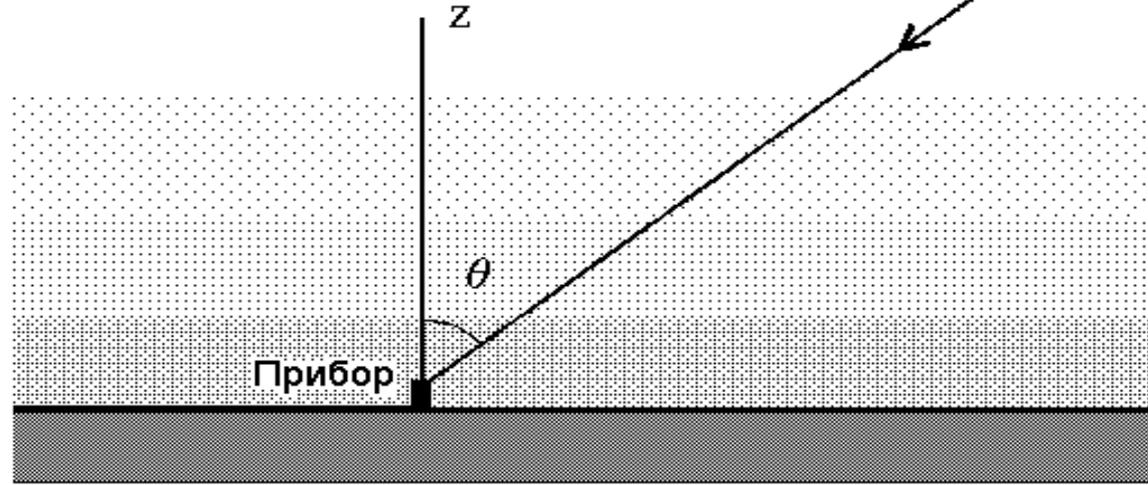
$$\tau_P(\nu) = -\ln \frac{J(\nu)}{J_0(\nu)} = \int_{s_1}^{s_2} k(\nu, s) \rho(s) ds \quad (4)$$

$$f(y) = \int_a^b A(x, y) \varphi(x) dx \quad (5)$$

$$f(y) = \int_a^b A(x, y, \varphi(x)) \varphi(x) dx \quad (6)$$

## Наземные измерения прозрачности – общее содержание газа

Солнце 



$$\tau_{\rho}(\nu) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^{\infty} k(\nu, z) \rho(z) dz \quad (7)$$

$$\tau_{\rho}(\nu) = \frac{k(\nu, z)}{\cos \theta} \int_0^{\infty} \rho(z) dz = \frac{k(\nu, z)}{\cos \theta} U, \quad U = \int_0^{\infty} \rho(z) dz, \quad U = \tau_{\rho}(\nu) \frac{\cos \theta}{k(\nu, z)} \quad (8)$$

**Наземные измерения прозрачности – элементы вертикального распределения профиля содержания газа**

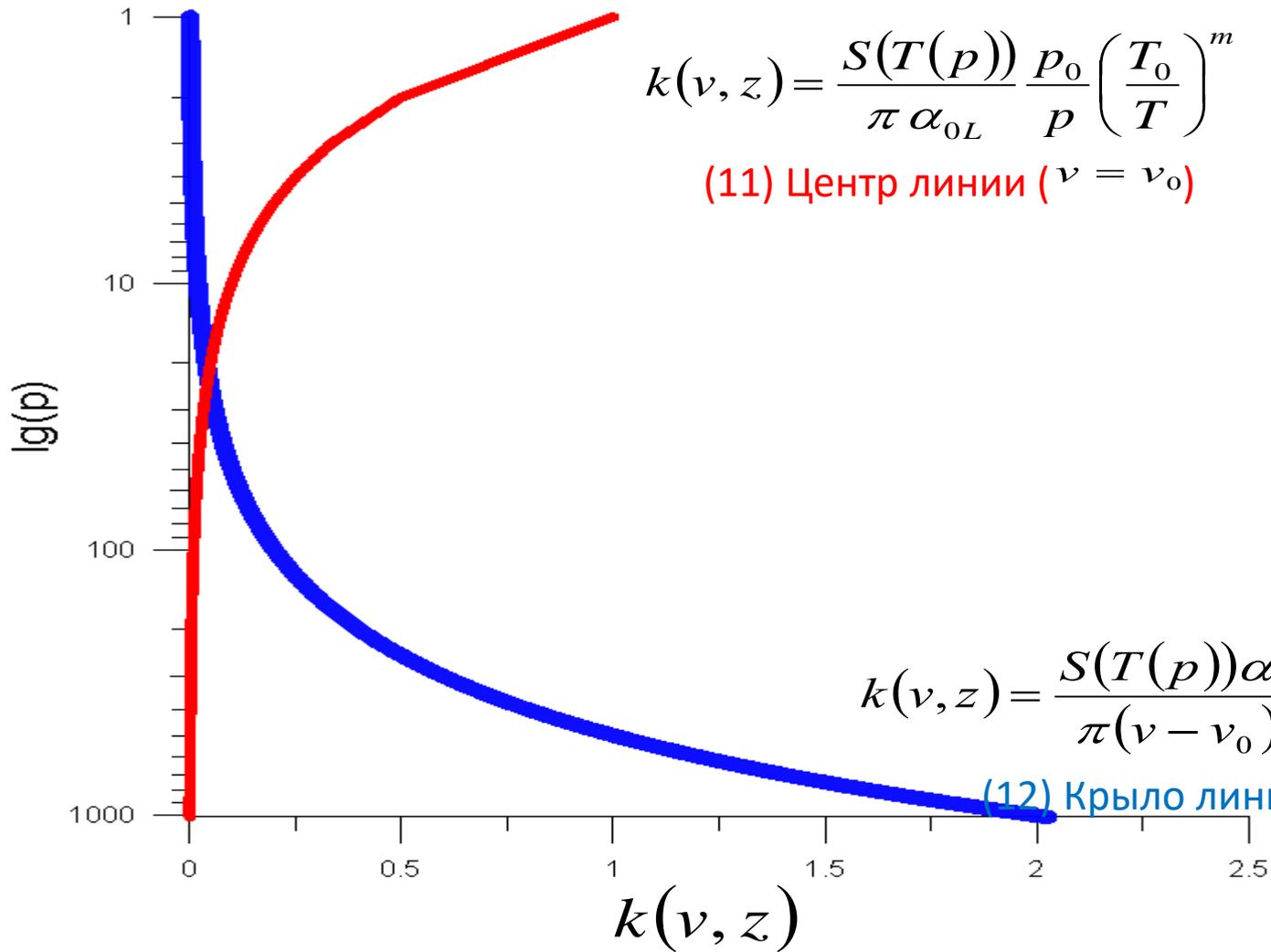
$$k(\nu, z) = \frac{S(T(z))}{\pi} \frac{\alpha_L(p(z), T(z))}{(\nu - \nu_0)^2 + \alpha_L^2(p(z), T(z))} \quad \alpha_L(p, T) = \alpha_{0L} \frac{p}{p_0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^m \quad (9,10)$$

$$k(\nu, z) = \frac{S(T(p))}{\pi \alpha_{0L}} \frac{p_0}{p} \left( \frac{T_0}{T} \right)^m$$

(11) Центр линии ( $\nu = \nu_0$ )

$$k(\nu, z) = \frac{S(T(p)) \alpha_{0L}}{\pi (\nu - \nu_0)^2} \frac{p}{p_0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^m$$

(12) Крыло линии ( $|\nu - \nu_0| \gg \alpha_L$ )



$$k(v, z) = \frac{S(T(z))}{\pi} \frac{\alpha_L(p(z), T(z))}{(v - v_0)^2 + \alpha_L^2(p(z), T(z))}$$

$$\tau_\rho(v) = \frac{\sec \theta}{g} \int_0^{p_0} k(v, p, T) q(p) dp \quad (13)$$

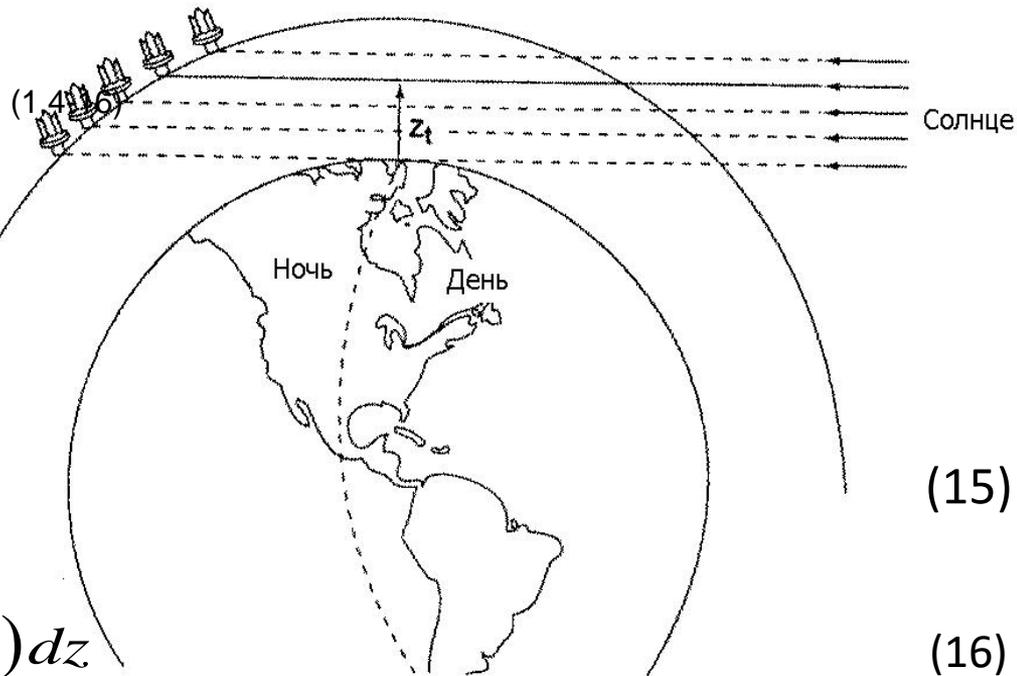
$$\tau_\rho(v) = \frac{\sec \theta}{g} \int_0^{p_0} \frac{S(T(p)) \alpha_L(p, T(p))}{\pi (v - v_0)^2 + \alpha_L^2(p, T(p))} q(p) dp \quad (14)$$

**Космические  
измерения  
прозрачности**

$$J(\nu, h_0) = J_0(\nu) \exp \left( -2 \int_{h_0}^{\infty} w(z, h_0) k(\nu, z) \rho(z) dz \right)$$

$$\tau(\nu, h_0) = 2 \int_{h_0}^{\infty} w(z, h_0) k(\nu, z) \rho(z) dz$$

$$\frac{I_{\Delta\lambda, \Delta\Omega}(h_{0,i}, \bar{\lambda})}{I_{\Delta\lambda, \Delta\Omega}(h_0 = \infty, \bar{\lambda})} = \int_{\Delta\lambda} \varphi_1(\lambda) \exp \left[ - \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{\Sigma}(s, h_{0,i}, \lambda) ds \right] d\lambda \quad , i=1, m$$



(15)

(16)

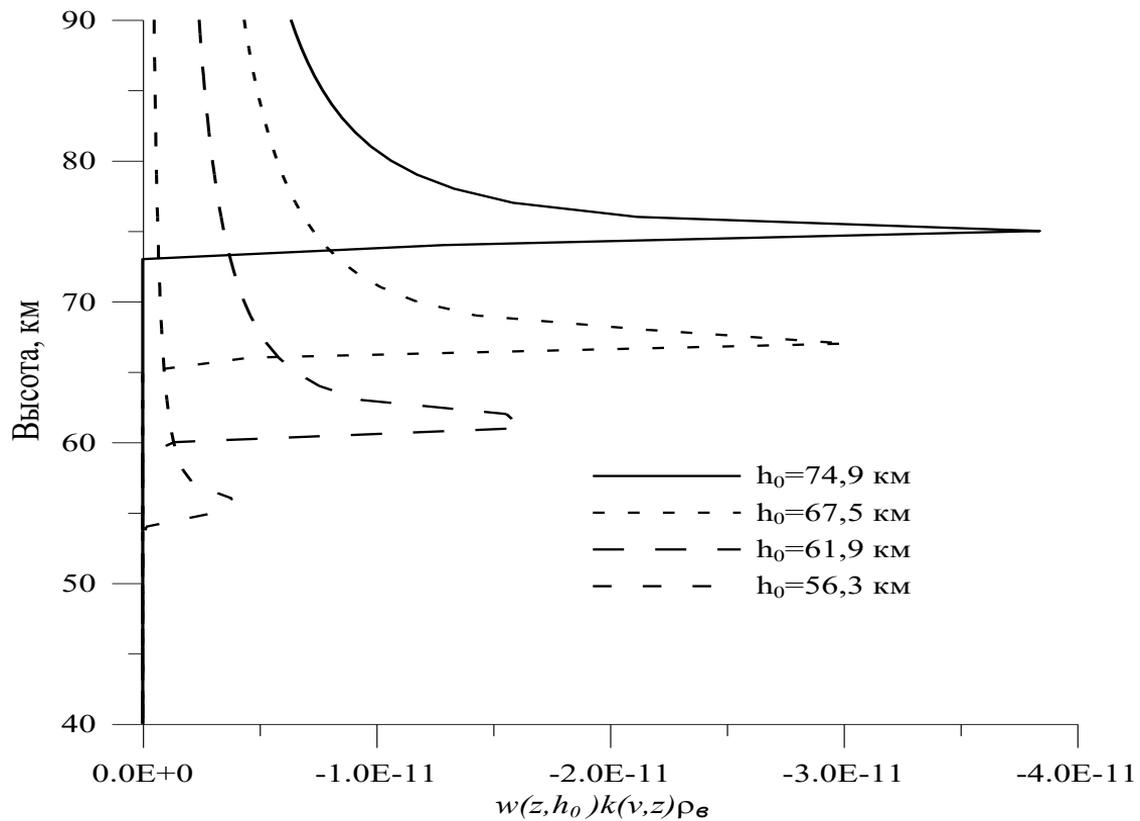


Рис. 3. Ядра интегрального уравнения прозрачности атмосферы на касательных трассах относительно профиля отношения смеси озона.

## Определение вертикального профиля температуры методом прозрачности

$$k(v, z) = \frac{S(T(z))}{\pi} \frac{\alpha_L(p(z), T(z))}{(v - v_0)^2 + \alpha_L^2(p(z), T(z))}$$

$$\tau(v, h_0) = 2 \int_{h_0}^{\infty} w(z, h_0) k(v, z) \rho(z) dz$$

$$S(T) = S_0 \left( \frac{T}{T_0} \right) \exp \left( k E'' \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right) \quad (18)$$

$$\tau(v, h_0) = 2 \int_{h_0}^{\infty} w(z, h_0) k(v, z, T(z)) \rho(z) dz$$

$$\delta \tau(v, h_0, T(z)) = \int_0^{\infty} K(v, z, h_0, T_0(z)) \delta T(z) dz$$

# Определение вертикального профиля плотности атмосферы методом прозрачности

1) По плотности постоянного газа

$$J(\nu, h_0) = J_0(\nu) \exp \left( - 2 \int_{h_0}^{\infty} w(z, h_0) k(\nu, z) \rho(z) dz \right) \quad (15)$$

2) По Релеевскому рассеянию

$$\alpha_R = \frac{8\pi^3 (n^2 - 1)^2}{3N\lambda^4} \quad n^2 - 1 \sim N$$

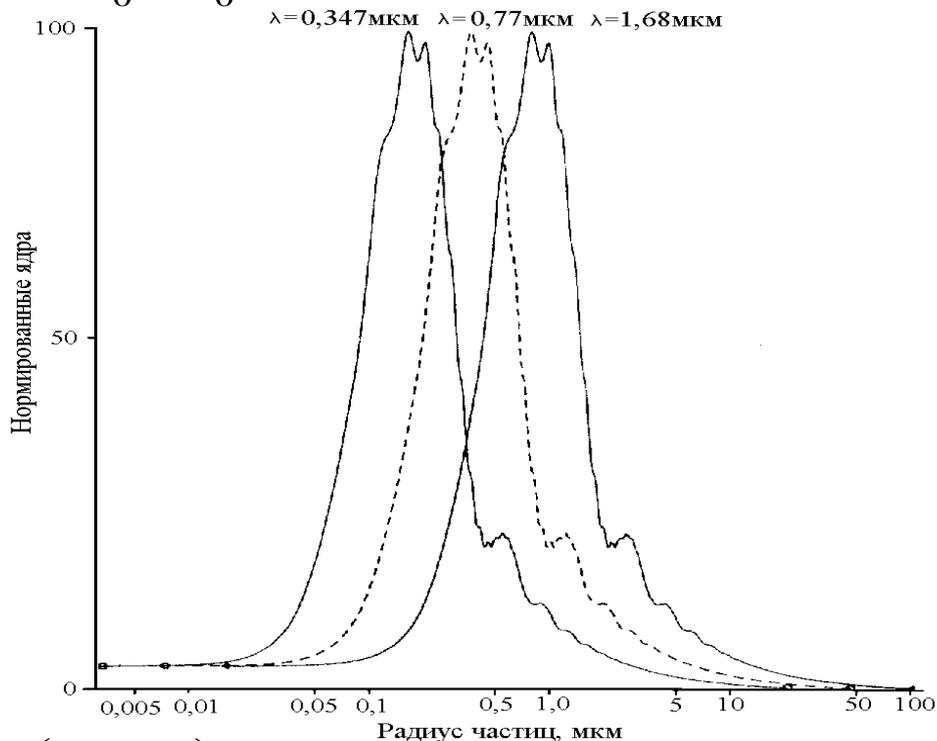
$N$  – концентрация молекул воздуха,  $\lambda$  – длина волны,  $n$  – показатель преломления.

$$\tau_R(\lambda, h_0) = \frac{2C}{\lambda^4} \int_{h_0}^{\infty} w(z, h_0) N(z) dz \quad (22)$$

## Определение характеристик атмосферных аэрозолей методом прозрачности

$$\tau_a(\lambda) = \sec \theta \int_0^{\infty} \alpha_a(z) dz = \sec \theta \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} \pi r^2 Q_e(r, m, \lambda, z) N_a(r, z) dr,$$

где  $Q_e(r, m, \lambda, z)$  – фактор ослабления частиц радиуса  $r$  с комплексным показателем преломления (КПП)  $m$ ,  $N_a(r, z)$  – функция распределения частиц по размерам.



(23)

Нормализованные ядра  $r^2 Q_e(m, r, \lambda)$  для  $m = 1,60 - 0,02i$  и трех длин волн.

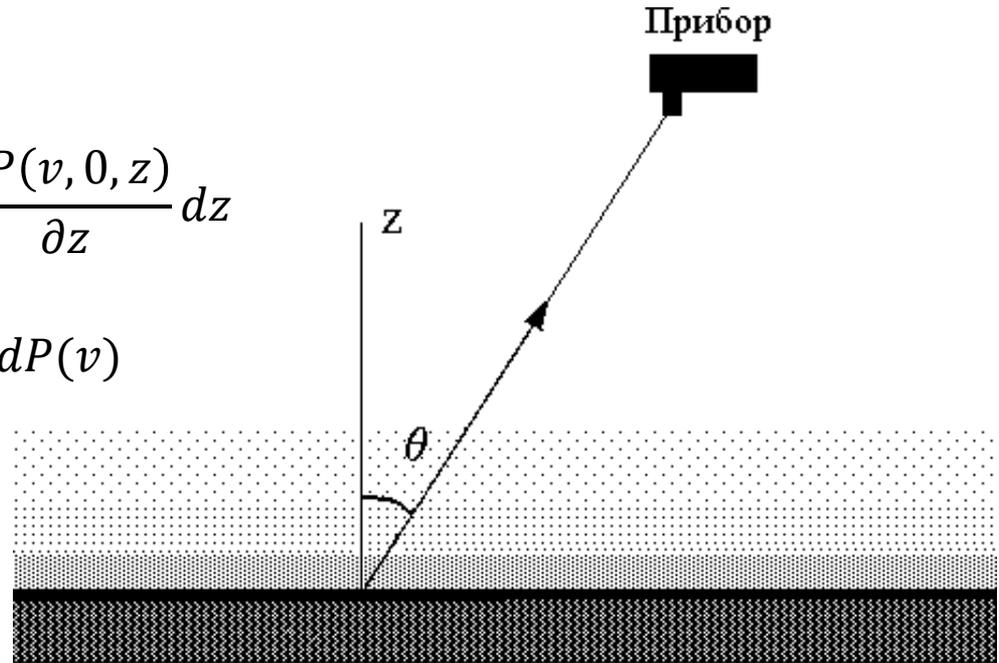
## Методы собственного излучения атмосферы

$$J(\nu, \theta) = B_\nu(T_s) \exp\left(-\int_0^\infty k_\nu(z) \rho(z) dz\right) + \int_0^\infty B_\nu(T(z)) k_\nu(z) \rho(z) \exp\left(-\int_z^\infty k_\nu(z') \rho(z') dz'\right) dz \quad (25)$$

$$P(\nu, z_1, z_2) = \exp\left(-\int_{z_1}^{z_2} k_\nu(z) \rho(z) dz\right)$$

$$J(\nu, \theta) = B_\nu(T_s) P(\nu, 0, \infty) + \int_0^\infty B_\nu(T(z)) \frac{\partial P(\nu, 0, z)}{\partial z} dz$$

$$J(\nu, \theta) = B_\nu(T_s) P(\nu, 0, \infty) + \int_0^\infty B_\nu(T(z)) dP(\nu)$$

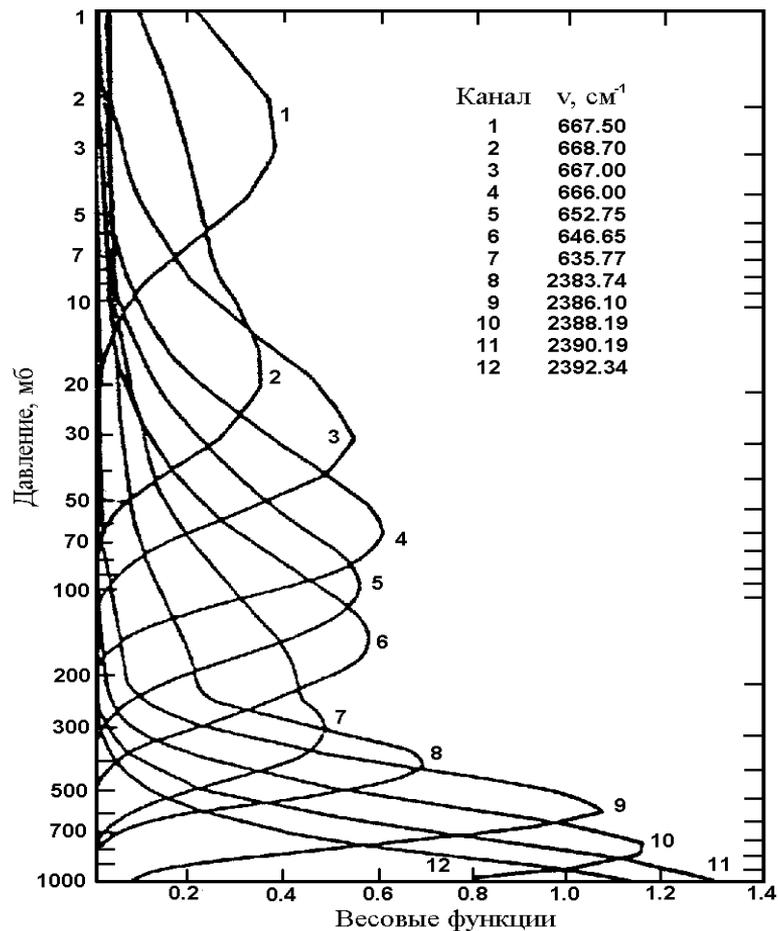


## Определение вертикального профиля температуры (собственное излучение атмосферы, надирная геометрия измерений)

$$J(\nu, \theta) = J(\nu, \theta, T(z), \rho(z), T_s)$$

Весовая функция  $\frac{\partial P(\nu, 0, z)}{\partial z}$

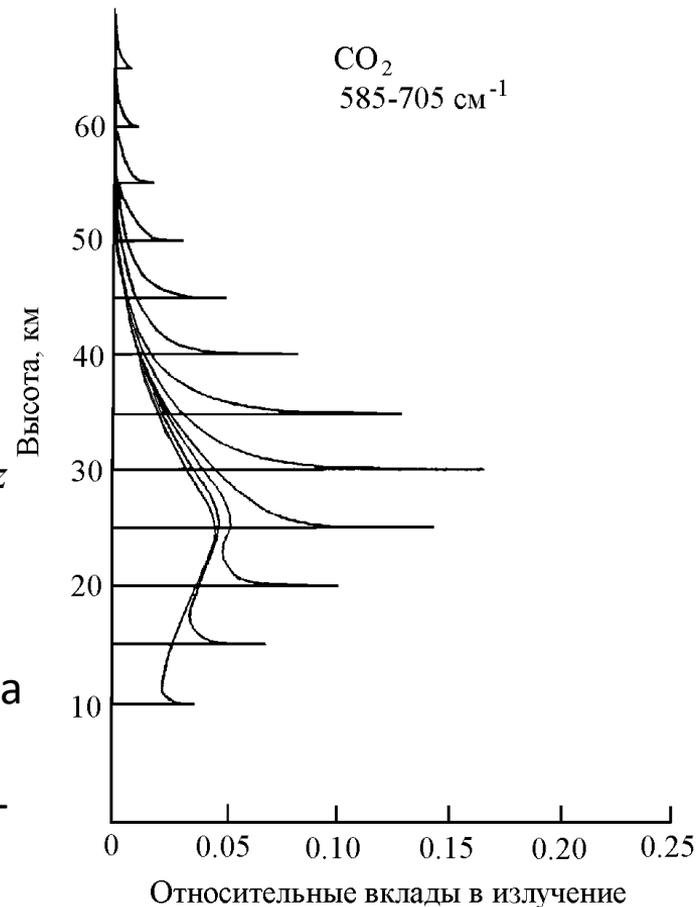
Весовые функции задачи определения температурного профиля по измерениям теплового излучения в полосах 4,3 и 15 мкм  $CO_2$ . Номера указывают центры каналов измерений.



# Определение вертикального профиля температуры (собственное излучение атмосферы, касательная геометрия измерений)

$$\begin{aligned}
 J(\nu, h_0) = & \int_{h_0}^{\infty} B_{\nu}(T(z)) w(z, h_0) \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial z} \left( \exp \left( - \int_z^{\infty} k_{\nu}(z') \rho(z') w(z', h_0) dz' \right) + \right. \\
 & \left. + \exp \left( - \int_{h_0}^z k_{\nu}(z') \rho(z') w(z', h_0) dz' - \int_{h_0}^{\infty} k_{\nu}(z') \rho(z') w(z', h_0) dz' \right) \right) dz
 \end{aligned}$$

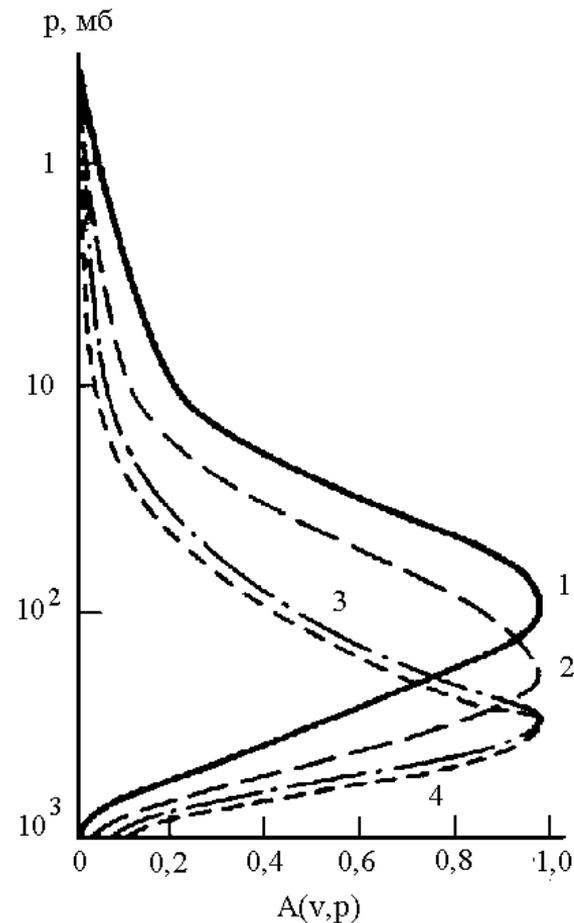
Вклады слоев атмосферы в тепловое излучение на касательных трассах для различных прицельных высот измерений в спектральном интервале 585–705 см<sup>-1</sup> в полосе 15 мкм



## Определение характеристик газового состава атмосферы (собственное излучение атмосферы, надирная геометрия измерений)

$$\delta J(\lambda, \theta) = \int_0^{\infty} K(\nu, z, \theta) \delta \rho(z) dz \quad (28)$$

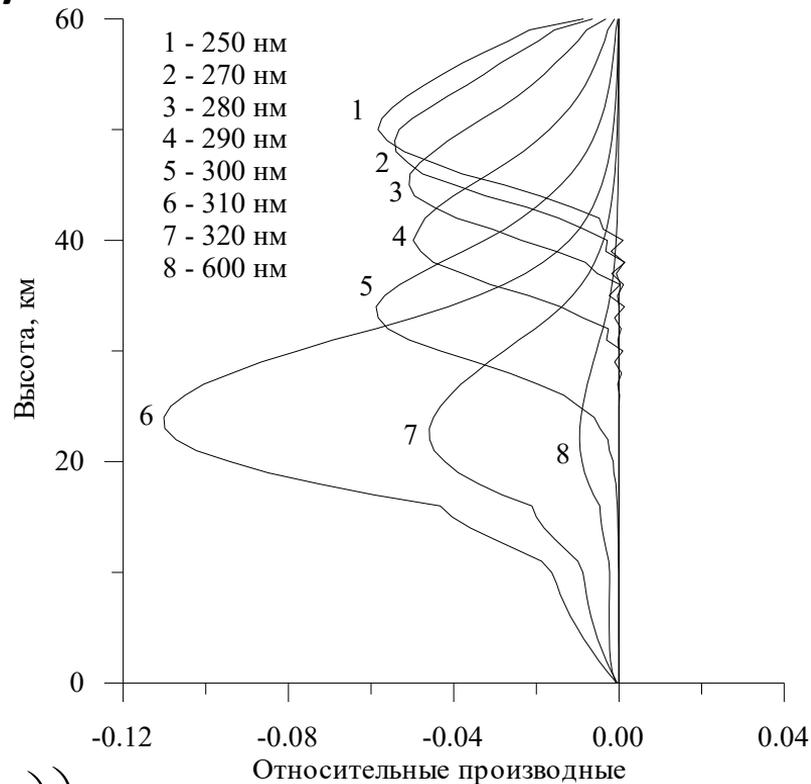
Нормированные на единицу ядра  $K$  интегрального уравнения задачи определения вертикального профиля содержания водяного пара по измерениям в надир уходящего теплового излучения



## Методы рассеянного солнечного излучения

Вариационные производные по относительной вариации профиля плотности озона рассеянного солнечного излучения в УФ и видимой областях спектра. Цифры указывают центры спектральных каналов измерения.

$$J(\lambda, \theta) = \alpha_R P(\theta) \frac{F_0}{4\pi} \times \int_0^{p_0} \exp\left[-(1 + \sec \theta_S) \left( \frac{1}{g} \int_0^p k_v(p') q_{O_3}(p') dp' + \tau_R(p) \right)\right] dp,$$



## Линеаризация обратных задач атмосферной оптики

$$f(y) = \int_a^b A(x, y, \varphi(x)) \varphi(x) dx$$

$$f(y) = \mathcal{A}(\varphi(x))$$

$$f = \mathcal{A}(\varphi) \quad f_0 = \mathcal{A}(\varphi_0)$$



$$\delta f(y) = f(y) - f_0(y) \approx \int_a^b K(x, y) \delta \varphi(x) dx,$$

$$\delta \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$$

$$P(\nu) = \exp\left(-\int_{s_1}^{s_2} \alpha(\nu, s) \rho(s) ds\right)$$

$$\rho(s) = \bar{\rho}(s) + \delta \rho(s)$$



$$P(\nu) = \exp\left(-\int_{s_1}^{s_2} \alpha(\nu, s) \bar{\rho}(s) ds\right) \exp\left(-\int_{s_1}^{s_2} \alpha(\nu, s) \delta \rho(s) ds\right)$$

$$\delta \rho(s) \ll \bar{\rho}(s), \quad \exp(x) \sim 1 + x$$



$$P(\nu) \approx \bar{P}(\nu) - \bar{P}(\nu) \int_{s_1}^{s_2} \alpha(\nu, s) \delta \rho(s) ds,$$

$$\bar{P}(\nu) = \exp\left(-\int_{s_1}^{s_2} \alpha(\nu, s) \bar{\rho}(s) ds\right)$$



$$\delta P(\nu) = P(\nu) - \bar{P}(\nu) = -\bar{P}(\nu) \int_{s_1}^{s_2} \alpha(\nu, s) \delta \rho(s) ds$$

## Функциональный ряд Тейлора и вариационная производная

$$\Phi = \{\varphi | \varphi: [a, b] \rightarrow R\} \quad F = \{f | f: [c, d] \rightarrow R\} \quad A: \Phi \rightarrow F$$

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \quad \delta f = \delta A(\varphi) = A(\varphi + \delta\varphi) - A(\varphi)$$

$$\delta f(y) = \int_a^b K(x, y) \delta\varphi(x) dx$$

свяжем линейными соотношениями  $\delta\varphi(x)$  и  $\delta f(y)$  для любой пары аргументов  $x$  и  $y$ .

$$A|_{\varphi_0}(x, y) \quad | \quad \delta f(y) = A|_{\varphi_0}(x, y) \delta\varphi(x) + o(\delta\varphi(x)) \quad \longrightarrow \quad \delta f(y) = \int A|_{\varphi_0}(x, y) \delta\varphi(x) dx$$

Формально:

$$\delta A_y(\varphi) = A_y(\varphi + \delta\varphi) - A_y(\varphi) = \int \frac{\delta A_y(\varphi(s))}{\delta\varphi(t)} \delta\varphi(t) dt$$

$$\text{def:} \quad \frac{\delta A_y(\varphi(s))}{\delta\varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta A_y(\varphi)}{\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \delta\varphi(\tau) d\tau}$$

при условии  $\delta\varphi(\tau) \equiv 0$  вне интервала  $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2]$ ,

## Практическое вычисление вариационной производной

$$\varepsilon \delta \varphi \quad A_y(\varphi(s) + \varepsilon \delta \varphi(s)) \quad \delta A_y(\varphi(s)) = \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} A_y(\varphi(s) + \varepsilon \delta \varphi(s)) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$A(\varphi(s)) = \exp\left(\int_a^b b(s)\varphi(s)ds\right) \quad A(\varphi(s) + \varepsilon \delta \varphi(s)) = \exp\left(\int_a^b b(s)(\varphi(s) + \varepsilon \delta \varphi(s))ds\right)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(\varphi(s) + \varepsilon \delta \varphi(s)) = \exp\left(\int_a^b b(s)(\varphi(s) + \varepsilon \delta \varphi(s))ds\right) \int_a^b b(s) \delta \varphi(s) ds .$$

$$\varepsilon = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta A(\varphi(s)) = \exp\left(\int_a^b b(s)\varphi(s)ds\right) \int_a^b b(s) \delta \varphi(s) ds \quad \longrightarrow \quad \frac{\delta A(\varphi(s))}{\delta \varphi(t)} = b(t) \exp\left(\int_a^b b(s)\varphi(s)ds\right)$$

## Использование вариационных производных в численном решении задач

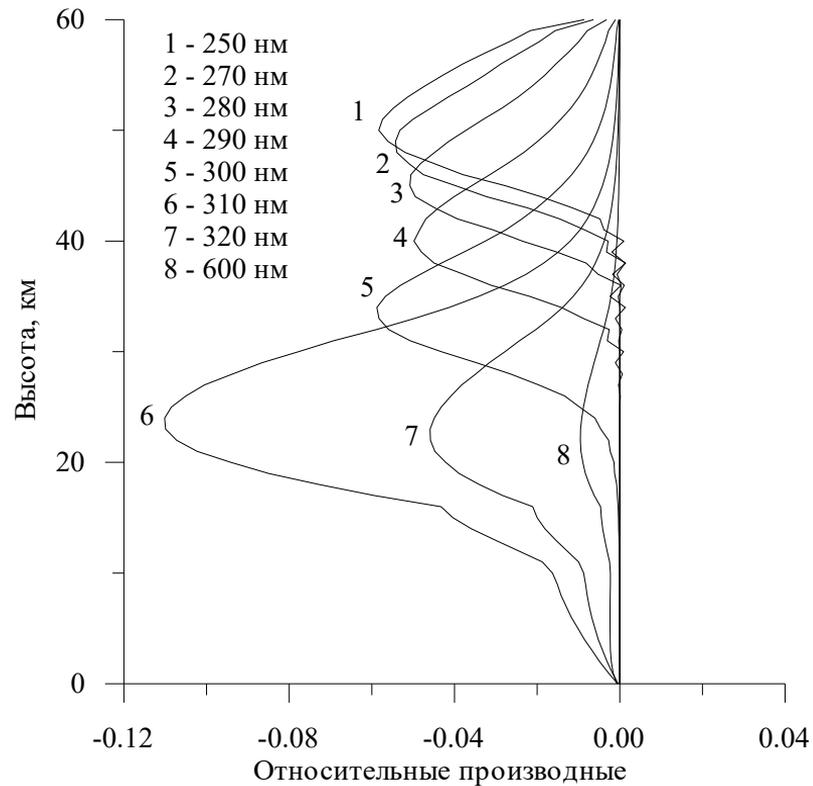
$$f(y) = \mathbf{A}(y, \varphi) \longrightarrow f(y_i) = \mathbf{A}(y_i, \varphi), \quad i = 1, \dots, m; \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

$$(!) \quad \varphi(x), x \in [a, b] \longrightarrow \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

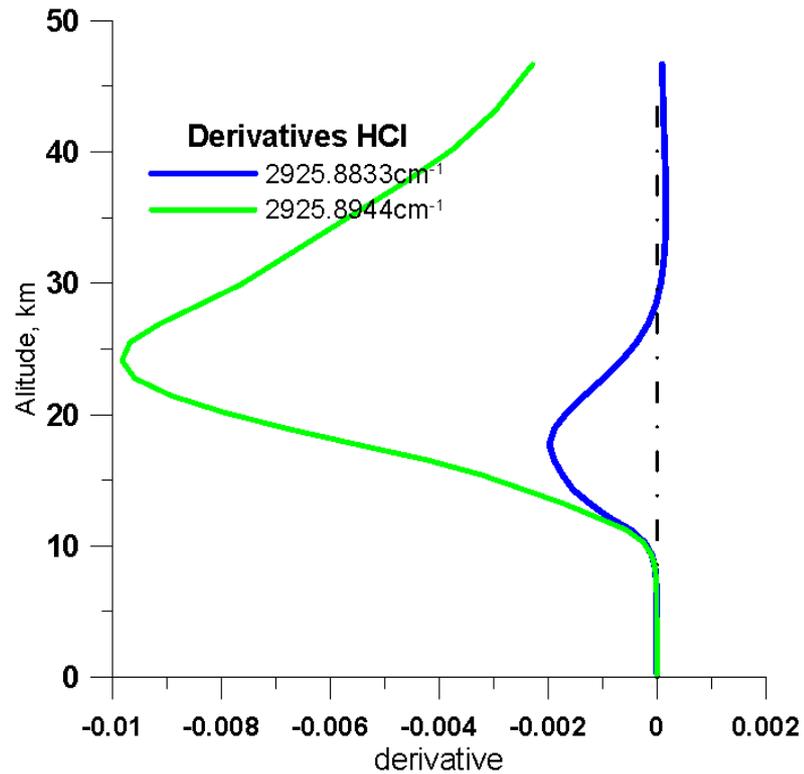
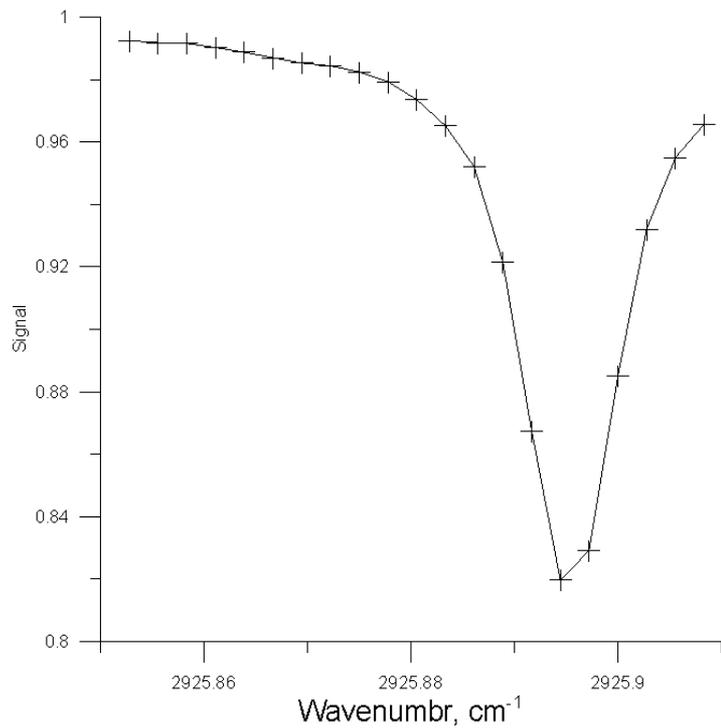
1) Редукция  $f_i = f(y_i)$ ;  $\varphi_i = \varphi(x_j)$ , затем расчет матрицы частных производных  $\frac{df_i}{d\varphi_j}$

2) Расчет вариационных производных  $\frac{\delta A|_y(\varphi(x))}{\delta \varphi(x)}$ , затем их редукция к матрице

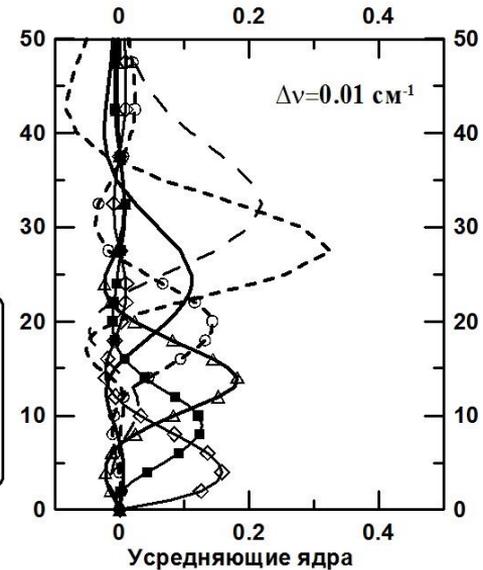
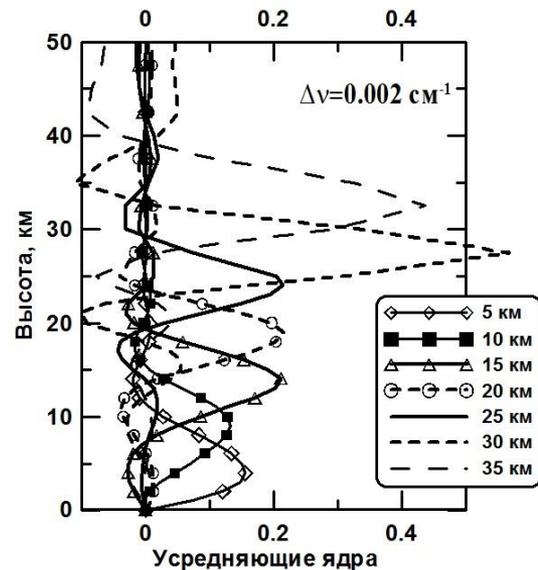
## Примеры вариационных производных



## Примеры вариационных производных



Результаты методических исследований возможностей наземного ИК метода определения вертикальной структуры содержания озона изложены в работе [26]. Для решения обратной задачи кроме каналов в полосе поглощения озона 9.6 мкм были также отобраны каналы из коротковолнового крыла полосы поглощения CO<sub>2</sub> 15 мкм. Эти каналы, вследствие особенности поглощения излучения в крыльях линий (лоренцевский контур), позволяют получить дополнительную информацию об



# Примеры задач, решение которых не существует или не единственно



Birds

ног – 300, голов – 100



$$\begin{cases} a + b = 100, \\ 4a + 2b = 300. \end{cases}$$



Animals

$$a = b = 50$$



Бееее!



Tiger

100 голов и 300 ног



$$\begin{cases} l + t = 100, \\ 4l + 4t = 300 \end{cases}$$



Lion

400=300



100 голов и 400 ног



$$\begin{cases} l + t = 100, \\ 4l + 4t = 400. \end{cases}$$



$0 < l < 100, t = 100 - l$

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 9, \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases} \longrightarrow x = 1, y = -1, z = 2$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ 4x + y + 5z = 12, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x + 4z = 11, \\ 3x + 4z = 10. \end{cases} \longrightarrow 11 = 10$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

## Примеры неустойчивости решения

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2,000001y = 4,000001. \end{cases} \longrightarrow x = 1, y = 1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2,000001y = 4, \end{cases} \longrightarrow x = 2, y = 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 4,000001. \end{cases} \longrightarrow 0 = 0,000001 \quad (4)$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 4. \end{cases} \longrightarrow -\infty < x < +\infty, y = 2 - x \quad (5)$$

## Неразрешимость и неоднозначность решения интегрального уравнения

$$\int_a^b A(x, y)\varphi(x)dx = f(y) \quad y \in [c, d]$$
$$\varphi(x) \longleftrightarrow \delta\varphi(s) \quad (2.2-3) \quad f(y) \longleftrightarrow \delta f(y) \quad (2.1)$$

Вырожденный случай  $A(x, y) = y + x$

$$\int_a^b (x + y)\varphi(x)dx = \int_a^b x\varphi(x)dx + y\int_a^b \varphi(x)dx = f_0 + f_1 y \quad f_0 = \int_a^b x\varphi(x)dx \quad f_1 = \int_a^b \varphi(x)dx$$

А) линейная пр. часть

$$f(y) = f_0 + f_1 y \quad \longrightarrow \quad \forall \varphi(x), x \in [a, b], \int_a^b \varphi(x)dx = f_1, \int_a^b x\varphi(x)dx = f_0$$

Б) нелинейная - нет решений

## Сглаживающее действие ядра уравнения свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x-y)\varphi(x)dx$$

$$|A(x,y)| < M, \quad \left| \frac{dA(x,y)}{dx} \right| < M, \quad x \in [a,b], \quad y \in [c,d]$$

$$f(y) = \int_a^b A(x,y)\varphi(x)dx + \varepsilon(y)$$

## Сведения из математики: метрические пространства

### **Понятия расстояния и метрического пространства. Пространства $L_2$ и $C_{[a,b]}$**

Пусть заданы линейное векторное пространство  $\mathbf{F}$  и вещественная функция  $\rho_F(f_1, f_2)$ ,  $f_1, f_2 \in \mathbf{F}$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\rho_F(f_1, f_2) > 0$ ;  $\rho_F(f_1, f_2) = 0$  только при  $f_1 = f_2$ ;
- 2)  $\rho_F(f_1, f_2) = \rho_F(f_2, f_1)$ ;
- 3)  $\rho_F(f_1, f_2) < \rho_F(f_1, f_3) + \rho_F(f_2, f_3)$  для любого  $f_3 \in \mathbf{F}$  (неравенство треугольника).

Тогда функция  $\rho_F$  называется расстоянием, а пространство  $\mathbf{F}$  метрическим пространством. Также говорят, что  $\mathbf{F}$  наделено метрикой  $\rho_F$ , или метризовано.

Мы будем рассматривать метрические пространства  $L_2$  – пространство функций, интегрируемых с квадратом на интервале  $[a, b]$  и  $C_{[a,b]}$  – пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций. Метрика в этих пространствах определяется следующими расстояниями  $\rho_F$ :

$$\rho_{L_2}(f_1, f_2) = \sqrt{\int_a^b (f_1(y) - f_2(y))^2 dy}; \quad (\text{П.1-1})$$

$$\rho_C(f_1, f_2) = \max_{y \in [a,b]} |f_1(y) - f_2(y)|. \quad (\text{П.1-2})$$

$\varphi_1$  – решение при  $f_1$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + N \sin(\omega x)$$

$$\int_a^b A(x, y) \varphi(x) dx = f_2(y) = f_1(y) + N \int_{a'}^{b'} A(x, y) \sin(\omega x) dx$$

$$\rho_{L_2}(f_1, f_2) = \sqrt{\int_c^d N^2 \left( \int_a^b A(x, y) \sin(\omega x) dx \right)^2 dy}$$

По частям

$$\int_a^b A(x, y) \sin(\omega x) dx = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x) A(x, y) \Big|_a^b + \frac{1}{\omega} \int_a^b \cos(\omega x) \frac{dA(x, y)}{dx} dx .$$

$$|\cos(\omega x)| \leq 1$$

$$|A(x, y)| < M$$

$$\left| \frac{dA(x, y)}{dx} \right| < M$$



$$\left| \cos(\omega x) A(x, y) \Big|_a^b \right| < 2M(b-a)$$

$$\left| \int_a^b \cos(\omega x) \frac{dA(x, y)}{dx} dx \right| < M(b-a)$$




$$\int_a^b A(x, y) \sin(\omega x) dx < \frac{1}{\omega} (b-a) 3M$$

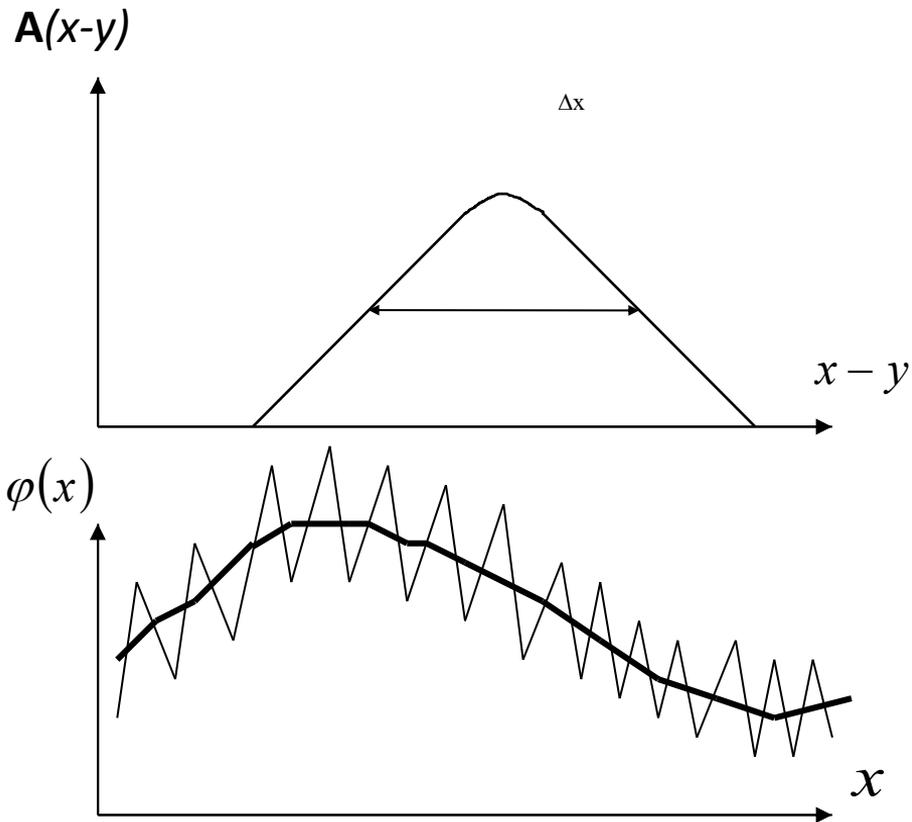


$$\rho_{L_2}(f_1, f_2) < \frac{1}{\omega} N(b-a) 3M \sqrt{d-c}$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x \in [a, b]} |N \sin(\omega x)| = N$$

# Сглаживающее действие ядра уравнения свертки

$$A(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x-y)\varphi(x)dx$$



## Понятие null-space

$$A\varphi = f \quad \varphi \in R^n \quad f \in R^m \quad \longrightarrow \quad A = \{\vec{a}_i\}_{i=1,m} \quad \text{строки} \quad \vec{a}_i \in R^n$$

$$\Omega = \left\{ \sum x_i \vec{a}_i \right\} \quad \text{Dim}(\Omega) \leq n \quad \longrightarrow \quad \Omega^\perp \neq \Lambda \quad \longrightarrow$$

$$A\varphi = 0 \quad , \text{ если } \varphi \in \Omega^\perp$$

$$\varphi = \varphi_\Omega + \varphi_\perp$$

Null-space = **ядро** гомоморфизма

## Формулировка понятия корректности задач математической физики

$$\varphi \in \Phi \quad f \in F \quad A: \Phi \rightarrow F \quad f = A(\varphi) \quad \Phi, F \text{- метрические!}$$

### Корректность по Адамару

- 1) для всякого элемента  $f \in F$  существует решение  $\varphi$  из пространства  $\Phi$ ;
- 2) решение  $\varphi$  единственно;
- 3) задача устойчива на паре пространств.

### Корректность по Тихонову

- 1) априори известно, что для некоторого класса данных  $f$  существует решение  $\varphi$ , принадлежащее заданному множеству  $M \subset \Phi$ ;
  - 2) решение единственно в классе функций  $M \subset \Phi$ ;
  - 3) бесконечно малым вариациям  $f$ , не выводящим решение  $\varphi$  за пределы  $M \subset \Phi$ , соответствуют бесконечно малые вариации решения  $\varphi$ .
- 3') решение  $\varphi$  непрерывно зависит от  $f$  на  $M_A$ .

Def. Собств. числа:  $B\vec{x} = \lambda\vec{x}$

## Некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов

Симметричная матрица  $A$  неотрицательно определена тогда и только тогда, когда существует матрица  $B$ , такая, что  $A = B'B$ .

Все собственные числа неотрицательно определенной симметричной матрицы неотрицательны.

Собственные вектора нормальной матрицы (нормального оператора) попарно ортогональны. (Матрица  $A$  называется нормальной, если  $A'A = AA'$ .)

$$\lambda_i \geq \lambda_j, i < j$$

## **Матрица в базисе из собственных векторов**

В различных приложениях часто используется рассмотрение матрицы (линейного оператора) в базисе из ее собственных векторов. Особенно удобно такое рассмотрение в случае ортонормальности этого базиса. В этом случае матрица становится диагональной, причем на диагонали ее стоят собственные числа. Унитарная матрица преобразования координат при этом составлена из собственных векторов исходной матрицы.

## Норма матрицы

Существуют различные определения нормы матрицы. В наших приложениях мы используем следующее: по определению норма матрицы  $\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{R}^m}$

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{R}^m} = \max_{\phi \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\phi\|_{\mathbf{R}^m}}{\|\phi\|_{\mathbf{R}^m}}, \quad (\text{П.4-4})$$

где  $\|\phi\|_{\mathbf{R}^m}$  – евклидова норма вектора  $\phi$ .

Очевидное свойство нормы матрицы:  $\|\mathbf{A}\phi\|_{\mathbf{R}^m} \leq \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{R}^m} \|\phi\|_{\mathbf{R}^m}$ .

Норма матрицы  $\mathbf{A}$  равна максимальной абсолютной величине ее собственного числа. Докажем это. Воспользуемся определением нормы матрицы (П.4-4), заменив вектор  $\phi$  его разложением по базису из собственных векторов  $\{\psi_i\}_{i=1,m}$  матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \max_{\phi \neq 0} \frac{\left\| \mathbf{A} \sum_{k=1}^m a_{\phi k} \psi_k \right\|}{\left\| \sum_{k=1}^m a_{\phi k} \psi_k \right\|} = \max_{a_{\phi k}} \frac{\left\| \sum_{k=1}^m a_{\phi k} \lambda_k \psi_k \right\|}{\left\| \sum_{k=1}^m a_{\phi k} \psi_k \right\|} \leq \\ &\leq |\lambda_{\max}| \max \frac{\left\| \sum_{k=1}^m a_{\phi k} \psi_k \right\|}{\left\| \sum_{k=1}^m a_{\phi k} \psi_k \right\|} = |\lambda_{\max}|. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\|\mathbf{A}\| = \max_{\phi \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\phi\|}{\|\phi\|} \geq \frac{\|\mathbf{A}\psi_{\max}\|}{\|\psi_{\max}\|} = |\lambda_{\max}|$ . Таким

образом, действительно,  $\|\mathbf{A}\| = \lambda_{\max}$ .

## Обратная матрица

Если для матрицы  $\mathbf{A}$  существует такая матрица  $\mathbf{B}$ , что для любого вектора  $\vec{\phi} \in R^m$  верно  $\mathbf{B}(\mathbf{A}\vec{\phi}) = \vec{\phi}$ , то матрица  $\mathbf{B}$  называется обратной матрице  $\mathbf{A}$  и обозначается  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Собственные числа обратной матрицы представляют собой обратные величины собственных чисел прямой матрицы, а соответствующие собственные вектора матриц совпадают.

Это утверждение легко доказывается. Пусть  $\mathbf{A}\vec{\psi}_j = \lambda_j\vec{\psi}_j$ . Умножим это равенство слева на  $\mathbf{A}^{-1}$ . Тогда  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{\psi}_j = \mathbf{A}^{-1}\lambda_j\vec{\psi}_j$ , и так как  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , то  $\vec{\psi}_j = \lambda_j\mathbf{A}^{-1}\vec{\psi}_j$  или  $\mathbf{A}^{-1}\vec{\psi}_j = \frac{1}{\lambda_j}\vec{\psi}_j$ . Последнее равенство также показывает, что обратная матрица имеет те же собственные вектора  $\vec{\psi}_j$ .

## Алгебраизация некорректной задачи и обусловленность Оценки погрешности решения обратной задачи

$$f(y) = \int_c^b A(x, y) \varphi(x) dx, \quad y \in [c, d] \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varphi_i = f_j, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{A} \vec{\varphi} \stackrel{a}{=} \vec{f} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}' \vec{f} = \mathbf{A}' \mathbf{A} \vec{\varphi} + \mathbf{A}' \vec{\varepsilon} \quad \begin{matrix} \text{(1)} \\ \vec{f} = \mathbf{A}' \vec{f} \\ \vec{\varepsilon} = \mathbf{A}' \vec{\varepsilon} \end{matrix} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}' \mathbf{A}$$

$$\longrightarrow \quad \vec{f} = \tilde{\mathbf{A}} \vec{\varphi} + \vec{\varepsilon} \quad (2) \quad \lambda_i \quad \lambda_i \geq \lambda_j \quad i < j$$

пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1,n}$  с.ч.  $\mathbf{A}' \mathbf{A}$

Обусловленность (устойчивость) падает с ростом отношения  $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$

$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$$m = n \quad \varphi + \delta, \quad f + \varepsilon$$

$$\rho_{R^m}(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (\varphi_{1j} - \varphi_{2j})^2} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\phi + \delta) = f + \varepsilon$$

Так как  $\mathbf{A}(\phi + \delta) = \mathbf{A}\phi + \mathbf{A}\delta$  и  $\mathbf{A}\phi = f$ , то  $\mathbf{A}\delta = \varepsilon$ , откуда  $\delta = \mathbf{A}^{-1}\varepsilon$  (3)

$$\|f\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\phi\| \quad \|\delta\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\varepsilon\| \quad (4)$$

$$\longrightarrow \|f\| \|\delta\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\phi\| \|\varepsilon\| \quad (5) \quad \longrightarrow \frac{\|\delta\|}{\|\phi\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\varepsilon\|}{\|f\|} \quad (6)$$

число обусловленности  $r = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$

$$r = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \geq \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{I}\| = 1$$

## Корреляционные и ковариационные матрицы.

$\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_N)$   $\longrightarrow$   $A_{T,T}$   $\longrightarrow$   $a_{i,j}$  – коэффициент корреляции  $T_i$  и  $T_j$

$$x, y \quad E x = \bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_1^n x_i \quad \sigma_x^2 = E(x - \bar{x})^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$cov(x, y) = E(x - \bar{x})(y - \bar{y}) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

**величины никак взаимно не связаны**

**0**

**величины изменяются синхронно**

$$y_i - \bar{y} = c(x_i - \bar{x})$$

$c \sigma_x^2$

**величины изменяются в противофазе**

$$y_i - \bar{y} = -c(x_i - \bar{x})$$

$-c \sigma_x^2$

$$cor(x, y) = E(x - \bar{x})(y - \bar{y}) / (\sigma_x \sigma_y)$$

## ***Эмпирические подходы к решению некорректных обратных задач***

### **Методы, повышающие устойчивость решения**

решение формулируется относительно определенных функционалов от искомой функции  $\varphi(x)$ ,

Итерационные методы

Решение при небольшом порядке системы

Решение на ортогональном базисе (ЭОФ или  $A'A$ )

Ограничение полосы частот

Разные способы доопределения задачи – ввода АИ

## Метод Филлипса

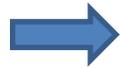
$$A\vec{\varphi} = \vec{f} \quad (1)$$

$$\vec{f}^* = \vec{f} + \vec{e} \quad (2)$$

$$\rho_1(f^*, A\varphi) \leq \varepsilon \quad (3)$$

+

$$\int_a^b \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \min \quad (4)$$



$$\rho_1(f^*, A\varphi) = \varepsilon \quad (5)$$

Задача на условный экстремум → метод Лагранжа

## **Метод множителей Лагранжа (условный экстремум)**

Рассмотрим применение метода для поиска экстремума функции многих переменных с ограничениями.

Чтобы найти максимумы и минимумы действительной функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , подчиненных достаточно гладкому *дополнительному условию* в виде уравнения связи

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (\text{П.2-1})$$

применяют следующий прием: для каждого из значений вещественной переменной  $\lambda$  ищется экстремум функции

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{П.2-2})$$

Полученные в результате параметрические зависимости  $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda)$  (или связывающие их уравнения, также параметрически зависящие от  $\lambda$ ) совместно с уравнением связи (П.2-1) позволяют разрешить его относительно *множителя Лагранжа*  $\lambda$  и найти решение исходной экстремальной задачи.

Обычно для практического использования метод формулируется в терминах необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{П.2-2a})$$

что технически удобно, поскольку позволяет говорить о совместном решении системы  $n$  уравнений (П.2-2a) и уравнения связи (П.2-1) относительно  $n + 1$  неизвестных ( $x_i, i = 1, \dots, n$  и  $\lambda$ ).

Доказательство проведем от противного. Допустим, что существуют  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  такие, что  $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) < f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и относительно штрихованных переменных выполняется условие (П.2-1). Но тогда поскольку условие (П.2-1) выполняется относительно обоих наборов переменных, то и  $\Phi(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) < \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , что противоречит построению набора  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Это противоречие доказывает применимость метода. Разумеется, к формулировке (П.2-2a) следует отнести все оговорки, связанные с необходимым условием экстремума.

Метод неопределенных множителей Лагранжа допускает разнообразные расширения, в частности, он может быть сформулирован для решения интересующей нас вариационной экстремальной задачи. В этом случае ищется функция  $\varphi$ , минимизирующая функционал  $F(\varphi)$  при условии

$$R(\varphi) = 0, \quad (\text{П.2-3})$$

где  $R$  также функционал от функции  $\varphi$ . Для поиска решения рассматривается задача минимизации функционала

$$\Phi(\varphi, \lambda) = \lambda R(\varphi) + F(\varphi), \quad (\text{П.2-4})$$

решение которой  $\varphi_\lambda$  зависит от множителя Лагранжа  $\lambda$  как от параметра. Тогда множитель Лагранжа может быть найден из совместного рассмотрения этой зависимости и условия (П.2-3). Доказательство аналогично предыдущему случаю.

Для наших целей важно отметить, что минимизация (П.2-4) производится при фиксированном  $\lambda$ , и реализующая минимум функция  $\varphi_\lambda$  зависит от множителя Лагранжа параметрически.

$$\int_a^b \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \lambda \left( \left( \rho_1(f^*, A\varphi) \right) - \varepsilon \right) = \min \quad (7) \quad \alpha = \lambda^{-1}$$

$$\rho_1(f^*, A\varphi) + \alpha \int_a^b \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \min \quad (8)$$

дискретизация

$$\Omega(\varphi) = \sum_{i,j}^n h_{i,j} \varphi_i \varphi_j = \min \quad (9) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}\varphi - f)^2 + \alpha \varphi' \mathbf{H} \varphi = \min \quad (10) \quad \Rightarrow \quad \varphi_\alpha$$

$$\alpha - \text{из} \quad \|\mathbf{A}\varphi - f\| = \varepsilon$$

$\alpha$  – не определять!

$$\left( \rho_1(f^*, A\varphi) \right)^2 + \alpha \int_a^b \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \min \quad (8a)$$

## Анализ устойчивости обратной задачи в ортогональном базисе

$$\mathbf{A}\vec{\varphi} = \vec{f} \longrightarrow \mathbf{A}'\overset{\rho}{f} = \mathbf{A}'\mathbf{A}\overset{\rho}{\varphi} + \mathbf{A}'\overset{\rho}{\varepsilon} \quad (1) \quad \overset{\rho}{f} = \mathbf{A}'\overset{\rho}{f} \quad \overset{\rho}{\varepsilon} = \mathbf{A}'\overset{\rho}{\varepsilon} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}'\mathbf{A}$$

$$\longrightarrow \overset{\rho}{f} = \tilde{\mathbf{A}}\overset{\rho}{\varphi} + \overset{\rho}{\varepsilon} \quad (2) \quad \lambda_i \quad \overset{\rho}{\psi}_i, \quad i=1, \dots, m, \quad \lambda_i \geq \lambda_j \quad i < j$$

$$(\overset{\rho}{\psi}_i, \overset{\rho}{\psi}_j) = 0, \quad i \neq j \quad (3) \quad (\overset{\rho}{\psi}_i, \overset{\rho}{\psi}_i) = \|\overset{\rho}{\psi}_i\|^2 = 1, \quad j=1, \dots, m \quad (4)$$

---

$$\overset{\rho}{\varphi} = \sum_{k=1}^m a_{\varphi k} \overset{\rho}{\psi}_k \quad (5) \quad \text{т.к.} \quad \mathbf{A}\overset{\rho}{\psi}_k = \lambda_k \overset{\rho}{\psi}_k \quad \longrightarrow \quad \overset{\rho}{f} = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{\varphi k} \overset{\rho}{\psi}_k + \overset{\rho}{\varepsilon} \quad (6)$$

$$(\overset{\rho}{f}, \overset{\rho}{\psi}_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{\varphi k} (\overset{\rho}{\psi}_k, \overset{\rho}{\psi}_j) + (\overset{\rho}{\varepsilon}, \overset{\rho}{\psi}_j) \quad (7) \quad \longrightarrow$$

$$a_{fj} = \lambda_j a_{\varphi j} + a_{\varepsilon j}, \quad j=1, \dots, m \quad a_{fj} = (\overset{\rho}{f}, \overset{\rho}{\psi}_j), \quad a_{\varepsilon j} = (\overset{\rho}{\varepsilon}, \overset{\rho}{\psi}_j) \quad (8)$$

$$a_{\varphi j} = \frac{a_{fj}}{\lambda_j} - \frac{a_{\varepsilon j}}{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, m \quad (9) \quad \rightarrow \quad \varphi = \sum_{k=1}^m \frac{a_{fk}}{\lambda_k} \psi_k - \sum_{k=1}^m \frac{a_{\varepsilon k}}{\lambda_k} \psi_k \quad (10)$$

$$r = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Собственные значения  $\lambda_j$  для 1500 каналов измерений в спектральной области 1–200 ГГц.

j	$\lambda_j$
1	254144,99
2	8975,13
5	210,82
10	2,26
15	0,20
20	0,0067

Информационный подход В. П. Козлова к анализу решения обратной задачи

$$\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y)\varphi(x)dx = f(y) \quad (1)$$

$$f^*(y) = f(y) + \varepsilon(y)$$

Вероятность правильных решений  $P_r = 1/2 + 1/2\Phi(\rho/2)$

$$\rho^2 \equiv \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 \quad (= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{A}(\varphi_1 - \varphi_2)|^2}{G(p)} dp)$$

$$\rho(\varphi, \varphi_0) \leq 1$$

# Современные численные методы решения обратных задач

## Подходы к постановке обратных задач

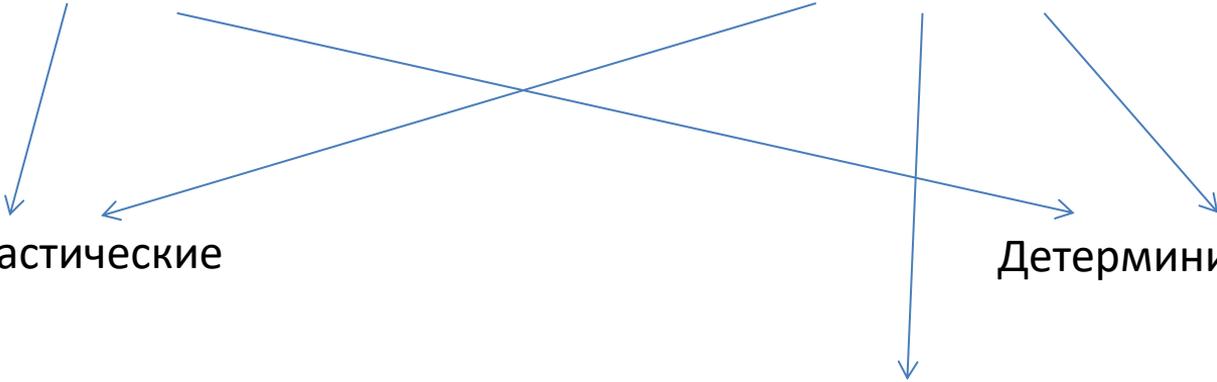
Статистические регрессионные

Физико-математические

Стохастические

Детерминистские

Минимизация невязки



Минимизация невязки



МНК

$$A: R^n \rightarrow R^m, \quad \vec{\varphi} \in R^n, \quad \vec{f} \in R^m, \quad \mathbf{A}\varphi^{\rho} = \vec{f}^{\rho}$$

$$\vec{f}^{\rho*} = \vec{f}^{\rho} + \varepsilon^{\rho} \quad E(\varepsilon^{\rho}) = 0 \quad E(\varepsilon^{\rho} \varepsilon^{\rho'}) = \Sigma \quad (1)$$

$$\mathbf{A}\vec{\varphi} \approx \vec{f}^{\rho*}$$

$$\rho_{\mathbf{S}}(\mathbf{A}\varphi^{\rho}, \vec{f}^{\rho*})^2 = \left\| \mathbf{A}\varphi^{\rho} - \vec{f}^{\rho*} \right\|_{\mathbf{S}}^2 = \left( \mathbf{A}\varphi^{\rho} - \vec{f}^{\rho*}, \mathbf{S}(\mathbf{A}\varphi^{\rho} - \vec{f}^{\rho*}) \right), \quad \mathbf{S} = \Sigma^{-1} \quad (3)$$

$$\frac{\left( \sum_{j=1}^n a_{1,j} \varphi_j - f_1^* \right)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\left( \sum_{j=1}^n a_{2,j} \varphi_j - f_2^* \right)^2}{\sigma_2^2}$$

$$\left\{ \tilde{\phi} \mid \left\| \mathbf{A}\tilde{\phi} - \vec{f}^* \right\|_{\mathbf{S}} \rightarrow \min \right\} \Leftrightarrow \phi^{\mathcal{P}} = \arg \min_{\phi \in R^n} \left\| \vec{f}^{\mathcal{P}*} - \mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}} \right\|_{\mathbf{S}}^2 \quad (4)$$

$$L(\phi^{\mathcal{P}}) = \left( \vec{f}^{\mathcal{P}*} - \mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}}, \mathbf{S} \vec{f}^{\mathcal{P}*} - \mathbf{S}\mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}} \right) \rightarrow \min \quad (5) \quad \frac{d}{d\phi^{\mathcal{P}}} L(\phi^{\mathcal{P}}) = 0 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \phi^{\mathcal{P}} = (\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_n), \quad \frac{\partial L(\phi^{\mathcal{P}})}{\partial \tilde{\phi}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL(\phi^{\mathcal{P}})}{d\phi^{\mathcal{P}}} = \frac{d}{d\phi^{\mathcal{P}}} (\vec{f}^{\mathcal{P}*}, \mathbf{S} \vec{f}^{\mathcal{P}*}) - \frac{d}{d\phi^{\mathcal{P}}} (\mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}}, \mathbf{S} \vec{f}^{\mathcal{P}*}) - \frac{d}{d\phi^{\mathcal{P}}} (\vec{f}^{\mathcal{P}*}, \mathbf{S}\mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}}) + \frac{d}{d\phi^{\mathcal{P}}} (\mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}}, \mathbf{S}\mathbf{A}\phi^{\mathcal{P}}) = 0. \quad (8)$$

## Дифференцирование функции векторного и матричного аргумента

1) Дифференцирование обобщенного скалярного произведения по векторному аргументу

$$\frac{d}{d\phi^{\rho}}(\phi^{\rho}, \mathbf{B} f^{\rho}) = \mathbf{B} f^{\rho}, \quad (\text{П.6-1})$$

$$\frac{d}{d\phi^{\rho}}(\phi^{\rho}, \mathbf{C} \phi^{\rho}) = \mathbf{C} \phi^{\rho} + \mathbf{C}' \phi^{\rho}. \quad (\text{П.6-2})$$

В случае симметричной матрицы  $\mathbf{C}$ , т. е. при  $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ , можно также записать

$$\frac{d}{d\phi^{\rho}}(\phi^{\rho}, \mathbf{C} \phi^{\rho}) = 2\mathbf{C} \phi^{\rho}$$

## Дифференцирование следа матрицы

$$\frac{d}{dX} \text{Tr}(XB) = B'$$

$$\frac{d}{dX} \text{Tr}(BX) = B$$

$$\frac{d}{dX} \text{Tr}(XBX) = XB' + BX \quad \mathbf{B} \text{ симметрично } \rightarrow \quad = 2XB$$

$$\frac{dL(\boldsymbol{\varphi})}{d\boldsymbol{\varphi}} = \frac{d}{d\boldsymbol{\varphi}}(f^*, \mathbf{S} f^*) - \frac{d}{d\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{S} f^*) - \frac{d}{d\boldsymbol{\varphi}}(f^*, \mathbf{S}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}) + \frac{d}{d\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{S}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}) = 0. \quad (8)$$

$$\longrightarrow -2\mathbf{A}'\mathbf{S} f^* + 2\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = 0 \quad \xrightarrow{\exists(\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A})^{-1}} \boxed{\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{S} f^*}$$

$$m=n, \exists \mathbf{A}^{-1} \longrightarrow \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{S} f^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{S} f^* = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{S})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{S} f^* = \mathbf{A}^{-1} f^*,$$

## Частные случаи матрицы погрешностей измерений

$$m \geq n, \text{rank } \mathbf{A} = n$$

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \varepsilon^U$$

и погрешности некоррелированы и одинаковы

1)  $\longrightarrow$   $\mathbf{S} = \sigma^{-2} \mathbf{I}$

$\longrightarrow$  
$$\hat{\varphi} = (\mathbf{A}' \sigma^{-2} \mathbf{I} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \sigma^{-2} \mathbf{I} f^{\rho*} = \sigma^2 (\mathbf{A}' \mathbf{A})^{-1} \sigma^{-2} \mathbf{A}' f^{\rho*} = (\mathbf{A}' \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' f^{\rho*} \quad (12)$$

2) погрешности  
некоррелированы  
и различны

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^{-2} \end{vmatrix}$$



$$L(\hat{\varphi}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sum_{j=1}^m a_{i,j} \varphi_j - f_i^*}{\sigma_i} \right)^2$$

Матрица Фишера

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A}$$

(14)

## Анализ решения обратной задачи методом наименьших квадратов

Смещение и ковариационная матрица ошибок оценки решения по МНК

$$\mathbf{b}^{\nu} = E(\mathbf{\varphi}^{\rho}) - \mathbf{\varphi}^{\rho} \quad (1)$$

т.к.  $\mathbf{A}\mathbf{\varphi}^{\rho} = \mathbf{f}^{\nu}$      $\mathbf{f}^{\nu*} = \mathbf{f}^{\nu} + \mathbf{\varepsilon}^{\rho}$      $\mathbf{\varphi}^{\rho} = (\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{f}^{\nu*}$  

$$\mathbf{b}^{\nu} = E(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{\varphi}^{\rho} + \mathbf{\varepsilon}^{\rho})) - \mathbf{\varphi}^{\rho} = E(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{\varphi}^{\rho} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{\varepsilon}^{\rho}) - \mathbf{\varphi}^{\rho} = \mathbf{\varphi}^{\rho} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{\Sigma}^{-1} E(\mathbf{\varepsilon}^{\rho}) - \mathbf{\varphi}^{\rho} = 0. \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E\left(\left(\mathbf{\varphi}^{\rho} - \mathbf{\varphi}^{\rho}\right)\left(\mathbf{\varphi}^{\rho} - \mathbf{\varphi}^{\rho}\right)'\right) \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E\left(\left(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{f}^{\nu*} - \mathbf{\varphi}^{\rho}\right)\left(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{f}^{\nu*} - \mathbf{\varphi}^{\rho}\right)'\right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{D}} &= E\left(\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A}\hat{\phi} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon - \hat{\phi}\right)\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A}\hat{\phi} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon - \hat{\phi}\right)'\right) = \\
&= E\left(\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\hat{\phi} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon - \hat{\phi}\right)\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\hat{\phi} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon - \hat{\phi}\right)'\right) = \\
&= E\left(\left(\hat{\phi} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon - \hat{\phi}\right)\left(\hat{\phi} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon - \hat{\phi}\right)'\right) = E\left(\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon\right)\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\varepsilon\right)'\right)
\end{aligned}$$

$$(AB)' = B'A', \quad F = F', \quad \Sigma^{-1} = (\Sigma^{-1})', \quad \Sigma = E\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}\right) \quad \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{D}} &= E\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}'\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\right)'\right) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}E\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}'\right)\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\right)' = \\
&= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\right)' = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\hat{b} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{F}^{-1}$$

среди всех несмещенных линейных оценок оценки МНК обладают наименьшими дисперсиями

## Анализ оценки решения по МНК в ортогональном базисе собственных векторов

$$\mathbf{A}\varphi = \overset{P}{f} \quad \overset{P}{f}^* = \overset{P}{f} + \varepsilon \quad (1)$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} \quad (\mathbf{A}'\mathbf{A})\overset{P}{\psi}_i = \lambda_i\overset{P}{\psi}_i, \quad i=1, \dots, n \quad \varphi = \sum_{i=1}^m a_i \overset{P}{\psi}_i \quad (7)$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} \text{ Нормальна, } \rightarrow \quad (\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Переход в пространство собств. векторов

$$\overset{P}{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad P = [\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \dots, \vec{\psi}_n] \quad \longrightarrow \quad \varphi = \mathbf{P}\overset{P}{a} \quad (8)$$

$$\overset{P}{f} = \mathbf{A}\mathbf{P}\overset{P}{a} \quad (9) \quad (1a) \quad \xrightarrow{\varphi = (\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{S}\overset{P}{f}^* \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{F}^{-1}}$$

$$\overset{P}{a} = (\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\overset{P}{f}^* = (\mathbf{P}'\mathbf{F}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\overset{P}{f}^* \quad (10) \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\overset{P}{a}} = (\mathbf{P}'\mathbf{F}\mathbf{P})^{-1} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{P}'\mathbf{F}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{f}^*$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{P}'\mathbf{F}\mathbf{P})^{-1}$$

пусть  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \sigma^{-2}\mathbf{I} \longrightarrow (\mathbf{A}'\mathbf{A})\boldsymbol{\psi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\psi}_i \Rightarrow (\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{L} \longrightarrow$

$$\mathbf{P}'(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{L} = \mathbf{L} \longrightarrow \tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{P}'\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = (\mathbf{P}'\mathbf{A}'\sigma^{-2}\mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = \sigma^2\mathbf{L}^{-1}$$

$$\longrightarrow \tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\mathbf{a}}} = \sigma^2\mathbf{L}^{-1}, \quad \mathbf{L} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{vmatrix}$$



$$\tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{vmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdot & 0 \\ \lambda_1^{-1} & & & \\ 0 & \sigma^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \sigma^2 \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{vmatrix}$$

## Методы введения априорной информации

$$T1: \quad \mathbf{R}_0 = L(u_1^{\nu}, \dots, u_k^{\nu})$$

$$T2: \quad \mathbf{R}_0 = \{\phi^{\nu} : (\phi^{\nu}, \mathbf{H}\phi^{\nu}) \leq C\}$$

$$B: \quad E(\phi^{\nu}) = \phi_0^{\nu} \quad E\left((\phi^{\nu} - \phi_0^{\nu})(\phi^{\nu} - \phi_0^{\nu})'\right) = \mathbf{D}$$

- проекционные;
- регуляризации;
- статистических оценок.

## Проекционные методы решения обратных задач

$$C_{[a,b]} \longrightarrow \mathbf{R}^n \quad \phi = \sum_{i=1}^k b_i u_i, \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}^k, \quad k < n$$

$$u_i = \begin{cases} 1, & t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0, & t < t_j, t \geq t_{j+1}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

$$(\mathbf{A}' \mathbf{A}) \psi_i = \lambda_i \psi_i \quad k: \quad u_i = \{\psi_i\}_{i=1,k}$$

$$\mathbf{P}_{(k)} = [\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \dots, \vec{\psi}_n] \quad \mathbf{A}_{(k)} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{(k)}$$

$$\hat{\rho} = (\mathbf{A}'_{(k)} \Sigma^{-1} \mathbf{A}_{(k)})^{-1} \mathbf{A}'_{(k)} \Sigma^{-1} f^*$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\rho} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma^2}{\lambda_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\lambda_2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \frac{\sigma^2}{\lambda_k} \end{vmatrix}$$

## Проекционные методы решения обратных задач

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \psi_i^p = \lambda_i \psi_i^p$$

А.М. Обухов

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \begin{vmatrix} \sigma_\varphi^2(z_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2(z_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_\varphi^2(z_n) \end{vmatrix}$$

$$k_{ij} = \sigma_\varphi(z_i) \sigma_\varphi(z_j) \exp\left(-\frac{|z_i - z_j|}{r_\varphi}\right) \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \left\{ k_{ij} \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$$

$$k_{ij} = \sigma_\varphi(z_i) \sigma_\varphi(z_j) \exp\left(-\frac{|z_i - z_j|^2}{r_\varphi^2}\right) \quad (9)$$

## ***Проекционные методы решения обратных задач***

*подбор*

$\mathbf{M}$  ( $\mathbf{M} \subset \Phi$ ) (конечное)

$$\hat{\phi} = \arg \min_{\phi \in \mathbf{M}} \rho(\mathbf{A}\phi, f^*)$$

*аналитические аппроксимации*

$$f(r) = \frac{1}{\sigma_e r \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2} \left(\ln \frac{r}{r_0}\right)^2\right) \quad (10)$$

## Методы регуляризации

$$\mathbf{T2}: \quad \mathbf{R}_0 = \{\varphi: (\varphi, \mathbf{H}\varphi) \leq C\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\varphi) = (f^* - \mathbf{A}\varphi, \mathbf{S}f^* - \mathbf{S}\mathbf{A}\varphi) = \|f^* - \mathbf{A}\varphi\|_{\mathbf{S}}^2 \rightarrow \min \quad (1) \\ (\varphi, \mathbf{H}\varphi) \leq C \quad \longrightarrow \quad (\varphi, \mathbf{H}\varphi) = C \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\varphi = \arg \min_{\varphi} \left( \|f^* - \mathbf{A}\varphi\|_{\mathbf{S}}^2 + \lambda (\|\varphi\|_{\mathbf{H}}^2 - C) \right) \quad (3) \quad \longrightarrow \quad \tilde{L}(\varphi) = \|f^* - \mathbf{A}\varphi\|_{\mathbf{S}}^2 + \alpha \|\varphi\|_{\mathbf{H}}^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

$$\|\varphi\|_{\mathbf{H}}^2 = (\varphi, \mathbf{H}\varphi)$$

$$\tilde{L}(\varphi) = (f^*, \Sigma^{-1}f^*) - (f^*, \Sigma^{-1}\mathbf{A}\varphi) - (\mathbf{A}\varphi, \Sigma^{-1}f^*) + (\mathbf{A}\varphi, \Sigma^{-1}\mathbf{A}\varphi) + \alpha(\varphi, \mathbf{H}\varphi).$$

Необходимое условие экстремума



$$\frac{d}{d\boldsymbol{\varphi}} \tilde{L}(\boldsymbol{\varphi}) = -2\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}f^* + 2\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi} + 2\alpha\mathbf{H}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (7)$$



$$(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{H})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}f^* \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}f^* = (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A} + \alpha\mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}f^* \quad (9)$$

## Анализ решения, полученного методом регуляризации

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \quad (10) \quad \mathbf{C} \psi_i = \lambda_i \psi_i$$

$$(\psi_i^{\rho}, \mathbf{F} \psi_j^{\rho}) = 0, \quad i \neq j \quad (11)$$

$$(\psi_i^{\rho}, \mathbf{H} \psi_j^{\rho}) = 0, \quad i \neq j \quad (12)$$

Нормируем:  $(\psi_i^{\rho}, \mathbf{F} \psi_i^{\rho}) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$



$$(\psi_i^{\rho}, \mathbf{H} \psi_i^{\rho}) = \left( \psi_i^{\rho}, \mathbf{H} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{C} \psi_i^{\rho} \right) = \frac{1}{\lambda_i} (\psi_i^{\rho}, \mathbf{F} \psi_i^{\rho}) = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{k=1}^n a_k \boldsymbol{\psi}_k \quad (15) \quad \xrightarrow{(8)} \quad (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{H}) \sum_{j=1}^n a_j \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{f}^* \quad (16)$$

$$\xrightarrow{(\cdot, \boldsymbol{\psi}_i)} \quad \sum_{j=1}^n a_j (\mathbf{F} \boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_k) + \alpha \sum_{j=1}^n a_j (\mathbf{H} \boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_k) = (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\psi}_k) \quad (17)$$

$$\xrightarrow{\quad} \quad a_k \lambda_k + \alpha a_k = (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\psi}_k) \quad \xrightarrow{\quad} \quad a_k = \frac{1}{\lambda_k + \alpha} (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\psi}_k)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k + \alpha} (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{\psi}_k) \boldsymbol{\psi}_k \quad \xrightarrow{\quad}$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k + \alpha} (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{f}^*, \boldsymbol{\psi}_k) \boldsymbol{\psi}_k$$

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{f} = \mathbf{A} \boldsymbol{\phi} \quad a_{fk} = (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_k) \quad a_{\varepsilon k} = (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\psi}_k)$$


$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{fk}}{\lambda_k + \alpha} \boldsymbol{\psi}_k + \sum_{k=1}^n \frac{a_{\varepsilon k}}{\lambda_k + \alpha} \boldsymbol{\psi}_k$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\rho}} = \left( \mathbf{P}'_{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{F} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\psi}} + \alpha \mathbf{P}'_{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\psi}} \right)^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\rho}} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\sigma^2}{\lambda_1 + \alpha \sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\lambda_2 + \alpha \sigma^2} & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma^2}{\lambda_n + \alpha \sigma^2} \end{array} \right\|$$

## Различные методы регуляризации

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\hat{\phi}) = (f^{\rho*} - \mathbf{A}\hat{\phi}, \mathbf{S}f^{\rho*} - \mathbf{S}\mathbf{A}\hat{\phi}) = \|f^{\rho*} - \mathbf{A}\hat{\phi}\|_{\mathbf{S}}^2 \rightarrow \min \quad (1) \\ (\hat{\phi}, \mathbf{H}\hat{\phi}) \leq C \quad \longrightarrow \quad (\hat{\phi}, \mathbf{H}\hat{\phi}) = C \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\hat{\phi} = (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}'\Sigma^{-1}f^{\rho*} = (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A} + \alpha\mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}'\Sigma^{-1}f^{\rho*}$$

Решение с минимальной нормой, или регуляризация нулевого порядка

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_n \quad \longrightarrow \quad \hat{\phi} = (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{A}'\Sigma^{-1}f^{\rho*} \quad (26)$$

Решение с максимальной гладкостью, или регуляризация первого порядка

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$H = D_1^2$$

$$(\vec{x}, H\vec{x}) = \sum (x_i - x_{i+1})^2$$

$$\mathbf{D}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$\|\phi\|_{\mathbf{H}}^2 = (\phi, \mathbf{H}\phi)$$

## Выбор параметра регуляризации

$$\varphi(\alpha_{opt}) \left| \left\| f^{\mathcal{P}*} - \mathbf{A}\varphi(\alpha) \right\|_{\Sigma^{-1}}^2 = \min \right. \quad (28)$$

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad q > 0$$

$$\left\| f^{\mathcal{P}*} - \mathbf{A}\varphi(\alpha) \right\|^2 = \sigma^2 m \quad (29)$$

$$\max \left| \varphi(\alpha_n) - \varphi(\alpha_{n+1}) \right| = \min \quad (30)$$

# **Статистические методы решения обратных задач**

## **П.5. Сведения из теории вероятностей**

**Вводные замечания.** Вероятностями называются значения некоторой действительной функции, определенной на классе идеализированных событий, которые представляют собой результаты испытания (опыта или наблюдения). Вероятности вводятся посредством определенных аксиом, абстрагируемых из основных свойств статистических относительных частот. Практически понятие вероятности проявляется в том, что обычно относительная частота случайного события в каждой последовательности независимых повторных испытаний приближается к соответствующей вероятности.

*Случайная величина* есть любая переменная  $x$ , значения которой  $x = X$  образуют множество элементарных событий или, другими словами, обозначают точки в пространстве выборок. Соответствующее распределение вероятностей называется распределением случайной величины  $x$ .

Распределение случайной величины  $x$  задается ее функцией распределения

$$\Phi_x(X) \equiv \Phi(X) \equiv P\{x < X\}, \quad (\text{П.5-1})$$

где  $P\{x < X\}$  – вероятность того, что значение случайной величины окажется меньше числа  $X$ .

Действительная случайная величина  $x$  называется непрерывной, если ее функция распределения  $\Phi_x(X) \equiv \Phi(X)$  непрерывна и имеет производную – плотность распределения вероятностей величины  $x$ :

$$\varphi_x(X) \equiv \varphi(X) \equiv \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq x < X + \Delta X\}}{\Delta X} = \frac{d\Phi}{dX}. \quad (\text{П.5-2})$$

Отметим формулы

$$P\{x < X\} \equiv \Phi(X) = \int_{-\infty}^X \varphi(x) dx, \quad (\text{П.5-3})$$

$$P\{a \leq x < b\} = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (\text{П.5-4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \Phi(\infty) = 1. \quad (\text{П.5-5})$$

Условная вероятность  $P\{E/E_1\}$  события  $E$  при условии осуществления события  $E_1$  определяется аксиомой: вероятность совмещения событий  $E \cap E_1$  равна  $P\{E \cap E_1\} = P\{E_1\}P\{E/E_1\}$  (правило умножения вероятностей).

## Многомерные распределения вероятностей

Если случайное событие описывается упорядоченным набором действительных чисел  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , то этот набор представляет собой значение  $n$ -мерной случайной величины  $X^p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Можно говорить о системе случайных величин или о  $n$ -мерном случайном векторе.

Распределение многомерной случайной величины  $X^p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  задается функцией совместного распределения

$$\begin{aligned} \Phi_x(X_1, X_2, \dots, X_n) &\equiv (X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \\ &\equiv P\{x_1 < X_1, x_2 < X_2, \dots, x_n < X_n\}. \end{aligned} \quad (\text{П.5-8})$$

Распределение системы двух случайных величин  $x_1, x_2$  определяет условное распределение величины  $x_1$  при  $x_2 = X_2$  и условное распределение величины  $x_2$  при  $x_1 = X_1$ .

Условные распределения величин  $x_1$  и  $x_2$  описываются условными плотностями распределений

$$\varphi_{1/2}(X_1 / X_2) = \frac{\varphi(X_1, X_2)}{\varphi_2(X_2)}, \quad \varphi_{2/1}(X_2 / X_1) = \frac{\varphi(X_2, X_1)}{\varphi_1(X_1)}. \quad (\text{П.5-9})$$

Отметим формулу Байеса для двух случайных величин

$$\varphi_{1/2}(X_1 / X_2) = \frac{\varphi_1(X_1)\varphi_{2/1}(X_2 / X_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\varphi_{2/1}(X_2 / x_1)dx_1}. \quad (\text{П.5-}$$

## Вывод формулы Байеса

Аксиома условной вероятности

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = P(A) \times P(B/A) \quad \longrightarrow$$

$$(2) \quad P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B/A)}{P(B)}$$

$$(3) \quad P(B) = \sum_i P(A_i) \times P(B/A_i) = \int_{\{A\}} P(A) \times P(B/A)$$

$$(4) \quad P(A/B) = \frac{P(A) \times P(B/A)}{\int_{\{A\}} P(A) \times P(B/A)}$$

Вернемся к  $n$ -мерному случаю;  $n$  математических ожиданий  $\mathbf{M}x_1 = \xi_1, \dots, \mathbf{M}x_n = \xi_n$  определяют точку  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , которая называется центром распределения вероятностей. Величины  $\mathbf{M}(x_1 - X_1)^{r_1} (x_2 - X_2)^{r_2} \dots (x_n - X_n)^{r_n}$  называются моментами порядка  $r_1 + r_2 + \dots + r_n$  относительно точки  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Центральные моменты второго порядка представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения:

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = \mathbf{M}(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) = \begin{cases} \mathbf{D} x_i = \sigma_i^2 & \text{при } i = k \text{ (дисперсия),} \\ \text{cov}\{x_i, x_k\} & \text{при } i \neq k \text{ (ковариация).} \end{cases}$$

Эти моменты определяют матрицу моментов  $\{\lambda_{ik}\}$ , называемую также ковариационной матрицей. Ее определитель называется обобщенной дисперсией  $n$ -мерного распределения. Коэффициенты корреляции

$$\rho_{ik} = \rho(x_i, x_k) = \frac{\lambda_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{kk}}} = \mathbf{M} \frac{x_i - \xi_i}{\sigma_i} \frac{x_k - \xi_k}{\sigma_k}, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (\text{П.5-11})$$

определяют корреляционную матрицу  $n$ -мерного распределения. Ковариационная и корреляционная матрицы вещественны и симметричны.

## Статистические методы решения обратных задач

$$\mathbf{A}\vec{\varphi} = \vec{f} \quad \mathbf{A}\vec{\varphi} \approx \vec{f}^* \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi_j = f_i, \quad i=1, \dots, m \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi_j + \varepsilon_i = f_i^*, \quad i=1, \dots, m$$

$$P(\vec{\varepsilon}) d\vec{\varepsilon} \quad d\vec{\varepsilon} = (d\varepsilon_1, \dots, d\varepsilon_m)$$

$$P(\vec{\varepsilon}) d\vec{\varepsilon} = P(\vec{\varepsilon} \in [\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1] \times [\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2] \times \dots \times [\varepsilon_m, \varepsilon_m + d\varepsilon_m])$$

$$P_{\varepsilon}(\vec{\varepsilon}) \quad P(\vec{f}^* / \vec{\varphi}) = P_{\varepsilon}(\vec{f}^* - \mathbf{A}\vec{\varphi}) \quad (1)$$

$$P(\vec{f}^* / \vec{\varphi}) \quad - \text{функция } m+n \text{ переменных} \quad f_i^*, \quad i=1, \dots, m \quad \varphi_j, \quad j=1, \dots, n$$

$$P(\vec{f}^* / \vec{\varphi}) + f_i^* \quad \xrightarrow{\quad ? \quad} \quad \varphi_j \quad ? \quad P(\vec{\varphi} / \vec{f}^*)$$

$$P(\phi)$$

$$P(\phi / f^*) = \frac{P(\phi)P(f^* / \phi)}{\int P(\phi)P(f^* / \phi) d\phi} \quad (4)$$

## Нормальное распределение ошибок измерений

$\varepsilon_i$  независимы и  $P(\varepsilon_i) = \sigma_i \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2\right)$

$$P(\boldsymbol{\varepsilon}) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2\right) = (2\pi)^{-m/2} \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2\right).$$

$$P(f^* / \boldsymbol{\varphi}) = \prod_{i=1}^m (2\pi\sigma_i^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} \left(f_i^* - \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi_j\right)^2\right)$$

$$P(f^* / \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|f^* - \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2\right) \quad (7)$$

## Решение для нормального априорного распределения

$$P(\boldsymbol{\phi}^{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{D}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\phi}^{\rho}, \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\phi}^{\rho})\right) \quad (8)$$

$$P(\boldsymbol{\phi}^{\rho} / f^{\rho*}) = \frac{P(\boldsymbol{\phi}^{\rho}) P(f^{\rho*} / \boldsymbol{\phi}^{\rho})}{\int P(\boldsymbol{\phi}^{\rho}) P(f^{\rho*} / \boldsymbol{\phi}^{\rho})}$$

$$P(f^{\rho*} / \boldsymbol{\phi}^{\rho}) = P_{\varepsilon}(f^{\rho*} - \mathbf{A} \boldsymbol{\phi}^{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|f^{\rho*} - \mathbf{A} \boldsymbol{\phi}^{\rho}\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2\right) \quad (7)$$

$$P(\boldsymbol{\phi}^{\rho} / f^{\rho*}) = P_{\varepsilon}(f^{\rho*} - \mathbf{A} \boldsymbol{\phi}^{\rho}) P(\boldsymbol{\phi}^{\rho}) \quad (11)$$

$$E(P(\boldsymbol{\rho} / f^*)) \xrightarrow{(7, 8, 11)}$$

$$P(\boldsymbol{\rho} / f^*) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{f}^* - \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}\|_{\Sigma^{-1}}^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2\right) \rightarrow \max \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} P(\boldsymbol{\rho} / f^*) = 0 \quad \|\boldsymbol{f}^* - \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}\|_{\Sigma^{-1}} = (\boldsymbol{f}^* - \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}, \mathbf{S}\boldsymbol{f}^* - \mathbf{S}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}) \equiv L(\boldsymbol{\rho})$$

$$\longrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}L(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\rho})\right) \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} (L(\boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\rho})) = 0 \quad (14)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} (L(\boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\rho})) = 0 \quad (15)$$



$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\rho}^* = (\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\rho}^* \quad (16)$$

$$(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{A}' (\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{D} \mathbf{A}' (\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\rho}^* \quad (18)$$

Доказательство (17)

$$\left(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1}\right) \left(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1}\right)^{-1} \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{A}' \left(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma}\right)^{-1} \left(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma}\right)$$

$$\longleftrightarrow \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma}\right) = \left(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1}\right) \mathbf{D} \mathbf{A}'$$

$$\longleftrightarrow \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}'$$

$$\longleftrightarrow \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \mathbf{A}' = \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \mathbf{A}'$$

## Анализ решения, полученного методом статистической регуляризации

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{F}$$

$$\hat{\phi} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{fk}}{\lambda_k + \alpha} \psi_k + \sum_{k=1}^n \frac{a_{\varepsilon k}}{\lambda_k + \alpha} \psi_k \quad \alpha = 1$$

$$\hat{\phi} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{fk}}{\lambda_k + 1} \psi_k + \sum_{k=1}^n \frac{a_{\varepsilon k}}{\lambda_k + 1} \psi_k$$

Анализ остаточной матрицы

$$\hat{\varphi} = \mathbf{R} \hat{f}^* \quad (20)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \quad \mathbf{R} = \mathbf{D} \mathbf{A}' (\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' + \Sigma)^{-1} \quad (21a,6)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E\left(\left(\hat{\varphi} - \varphi\right)\left(\hat{\varphi} - \varphi\right)'\right) \xrightarrow{\hat{\varphi} = \mathbf{R} \hat{f}^* \quad \hat{f}^* = \mathbf{A} \varphi + \varepsilon} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E\left(\left(\mathbf{R}(\mathbf{A} \varphi + \varepsilon) - \varphi\right)\left(\mathbf{R}(\mathbf{A} \varphi + \varepsilon) - \varphi\right)'\right) \xrightarrow{E(\varphi, \varepsilon') = 0}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E(\varphi \varphi') - E(\varphi \varphi' \mathbf{A}' \mathbf{R}') - E(\mathbf{R} \mathbf{A} \varphi \varphi') + E(\mathbf{R} \mathbf{A} \varphi \varphi' \mathbf{A}' \mathbf{R}') + E(\mathbf{R} \varepsilon \varepsilon' \mathbf{R}')$$

$$\xrightarrow{E(\varphi \varphi') = \mathbf{D}} \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{D} - \mathbf{D} \mathbf{A}' \mathbf{R}' + \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' \mathbf{R}' + \mathbf{R} \Sigma \mathbf{R}' \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}'\mathbf{R}' + \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'\mathbf{R}' + \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}' \quad \longrightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{A})\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{A})' + \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}' \quad (25)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \quad (21a)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A})\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}) + \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}.$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - 2\mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}.$$

За скобки  $\mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}$   $(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \mathbf{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} \quad (26)$$

$$(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \mathbf{\Sigma})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$$


$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \quad (28)$$

## Решающий оператор наилучшей линейной оценки

Решение в случае задания двух первых моментов априорного распределения

$$\mathbf{D} = E\left((\boldsymbol{\rho} - E\boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\rho} - E\boldsymbol{\rho})'\right) \quad E(\boldsymbol{\rho}) = 0$$
$$\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'), \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{f}^* \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{R}\boldsymbol{f}^* \quad (2)$$


$$\tilde{\mathbf{D}} = E\left((\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}\boldsymbol{f}^*)(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}\boldsymbol{f}^*)'\right) \quad (4)$$

Минимизируем ошибку:  $L(\mathbf{R}) = \text{Tr} E\left((\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}\boldsymbol{f}^*)(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}\boldsymbol{f}^*)'\right) \rightarrow \min \quad (5)$

$$\frac{d}{d\mathbf{R}} \text{Tr} \tilde{\mathbf{D}} = 0 \xrightarrow{\text{(24 выше)}} \frac{d}{d\mathbf{R}} \text{Tr} (\mathbf{D} - \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}'\mathbf{R}' + \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'\mathbf{R}' + \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}') = 0 \quad (7)$$

$$-\mathbf{D}\mathbf{A}' - \mathbf{D}\mathbf{A}' + 2\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + 2\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \quad (9)$$

(21)  $\Leftrightarrow$  (8) !!!!

## Метод минимума априорной информации

$$\mathbf{D} = \sigma_{\varphi}^2 \mathbf{I}_n$$

$$\Sigma = \sigma_{\varepsilon}^2 \mathbf{I}_m$$

$$\gamma = \sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{\varphi}^2 \quad (21)$$



$$\hat{\varphi} = \mathbf{A}' (\mathbf{A} \mathbf{A}' + \gamma \mathbf{I}_m)^{-1} \mathbf{f}^*$$

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{A}' \mathbf{A} + \gamma \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{f}^*$$

(11,12)

! Совпадает с Тихоновской рег, но параметр  $\gamma$  обоснован

$\gamma = 0$  Совпадает с МНК

## Регрессионный подход к решению обратных задач атмосферной оптики

$$\vec{f}^* = \vec{f} + \varepsilon \quad \cancel{\mathbf{A}\vec{\varphi} = \vec{f}} \quad (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\vec{\varphi} = \vec{f} + \varepsilon$$

$$\left\{ \vec{f}_s, \vec{\varphi}_s \right\} \leftrightarrow \left\{ (\vec{\varphi}, \vec{f})_s \right\}, \quad s = 1, l \quad \longrightarrow$$

$$\vec{\varphi} = \mathbf{R}(\vec{f}) \quad \left| \quad \sum_s \left\| \vec{\varphi}_s - \mathbf{R}(\vec{f}_s) \right\|^2 \rightarrow \min$$

## Множественная Линейная Регрессия

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{f}}$$

$$\{(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{\mathbf{f}})_s\}, \quad s = 1, l \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = E(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{l} \sum_{s=1}^l \boldsymbol{\rho}_s \quad \hat{\mathbf{f}} = E(\mathbf{f}) = \frac{1}{l} \sum_{s=1}^l \mathbf{f}_s \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\varphi}} &= E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \left\{ k_{\boldsymbol{\varphi} \ i,j} \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}; \quad k_{\boldsymbol{\varphi} \ i,j} = \frac{1}{l-1} \sum_{s=1}^l v_{si} v_{sj} = \frac{1}{l-1} \sum_{s=1}^l (\varphi_{si} - \bar{\varphi}_i)(\varphi_{sj} - \bar{\varphi}_j); \\ \mathbf{K}_{\mathbf{f}} &= E(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \left\{ k_{\mathbf{f} \ i,j} \right\}_{\substack{i=1,m \\ j=1,m}}; \quad k_{\mathbf{f} \ i,j} = \frac{1}{l-1} \sum_{s=1}^l u_{si} u_{sj} = \frac{1}{l-1} \sum_{s=1}^l (f_{si} - \bar{f}_i)(f_{sj} - \bar{f}_j); \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\varphi}\mathbf{f}} &= E(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}') = \left\{ k_{\boldsymbol{\varphi}\mathbf{f} \ i,j} \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}; \quad k_{\boldsymbol{\varphi}\mathbf{f} \ i,j} = \frac{1}{l-1} \sum_{s=1}^l v_{si} u_{sj} = \frac{1}{l-1} \sum_{s=1}^l (\varphi_{si} - \bar{\varphi}_i)(u_{sj} - \bar{u}_j). \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E \left( (\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}})(\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}})' \right) \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E \left( (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{R}f)(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{R}f)' \right) \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = E(\mathbf{R}f f' \mathbf{R}') - E(\mathbf{R}f \boldsymbol{\phi}') - E(\boldsymbol{\phi} f' \mathbf{R}') + E(\boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\phi}')$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{R} \mathbf{K}_f \mathbf{R}' - \mathbf{R} \mathbf{K}_{f\phi} - \mathbf{K}_{\phi f} \mathbf{R}' + \mathbf{K}_{\phi}$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{D}} \quad \rightarrow \min \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{d\mathbf{R}} \text{Tr} \tilde{\mathbf{D}} = 0$$

$$\frac{d}{d\mathbf{R}} \left( \text{Tr} \mathbf{R} \mathbf{K}_f \mathbf{R}' - \text{Tr} \mathbf{R} \mathbf{K}_{f\varphi} - \text{Tr} \mathbf{K}_{\varphi f} \mathbf{R}' \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{d\mathbf{X}} \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{B}) = \mathbf{B}'$$

$$\frac{d}{d\mathbf{X}} \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}\mathbf{B}$$



$$2\mathbf{R}\mathbf{K}_f - 2\mathbf{K}_{\varphi f} = 0 \quad \xrightarrow{\vec{f}^* = \vec{f} + \vec{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_{\varphi f} \mathbf{K}_f^{-1}$$

$$\hat{\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi f} \mathbf{K}_f^{-1} \hat{f}$$

$$\vec{f}^* = \vec{f} + \vec{\varepsilon} \quad !!!$$

## Особенности регрессионного подхода

1) + ~~A~~

$$P(\vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{K}_\rho|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\vec{\rho}, \mathbf{K}_\rho^{-1} \vec{\rho})\right) \quad (14)$$

2) +  $\vec{\varphi} \approx \in \{\vec{\varphi}_s\}$

$$P(\vec{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{K}_f|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\vec{f}, \mathbf{K}_f^{-1} \vec{f})\right) \quad (15)$$

локализация

3) + Простота и скорость вычислений

4) – сложность подбора  $\{(\vec{\varphi}, \vec{f})_s\}, \quad s = 1, l$

## Связь МЛР с другими методами решения некорректных обратных задач

$$\overset{\rho}{f}^* = \mathbf{A} \overset{\rho}{\phi} + \overset{\rho}{\varepsilon} \quad \xrightarrow{E(\overset{\rho\rho}{\phi\varepsilon^*})=0, \quad E(\overset{\rho\rho}{\varepsilon\phi^*})=0}$$

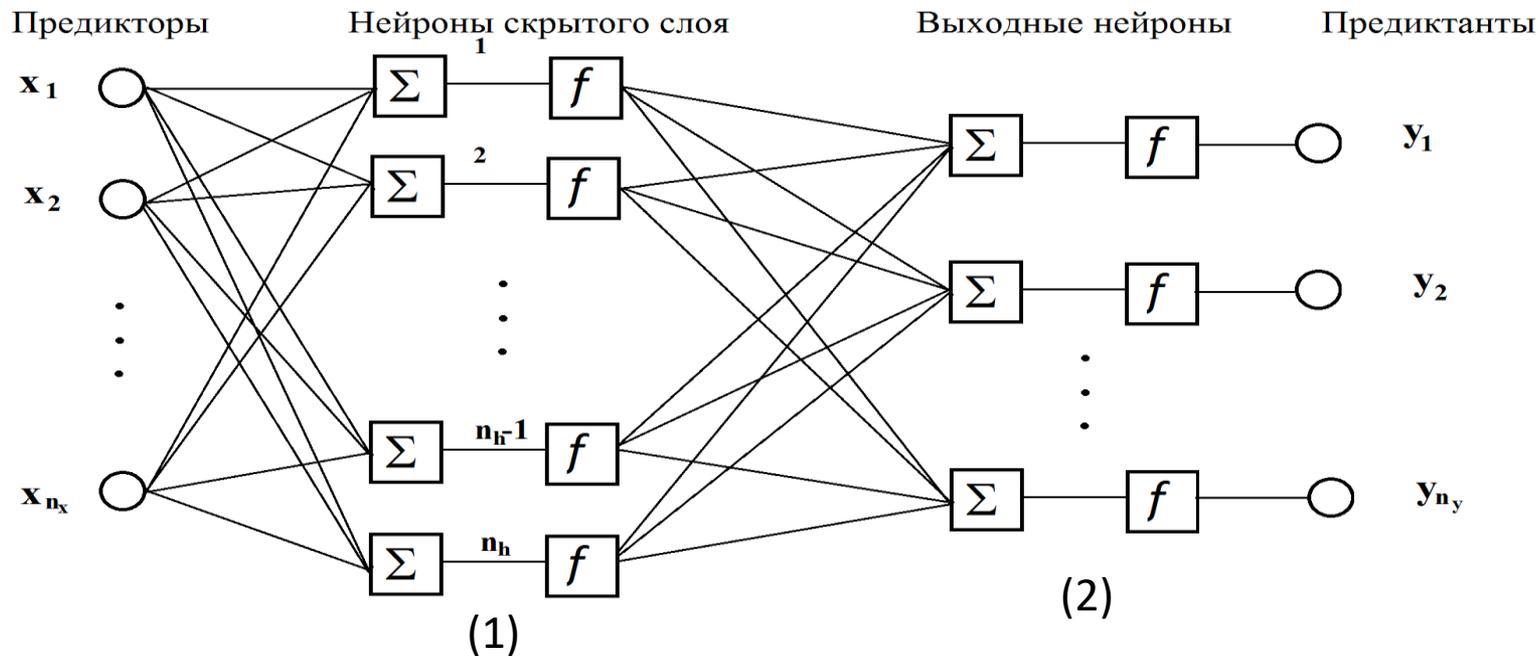
$$\mathbf{K}_f \equiv E\left(\overset{\rho}{f} \overset{\rho}{f}^{\prime}\right) = E\left((\mathbf{A} \overset{\rho}{\phi} + \overset{\rho}{\varepsilon})(\mathbf{A} \overset{\rho}{\phi} + \overset{\rho}{\varepsilon})^{\prime}\right) = E(\mathbf{A} \overset{\rho\rho}{\phi\phi}^{\prime} \mathbf{A}^{\prime}) + E(\overset{\rho\rho}{\varepsilon\varepsilon}^{\prime}).$$

$$\xrightarrow{E(\mathbf{A} \overset{\rho\rho}{\phi\phi}^{\prime} \mathbf{A}^{\prime}) = \mathbf{A} E(\overset{\rho\rho}{\phi\phi}^{\prime}) \mathbf{A}^{\prime} = \mathbf{A} \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} \quad E(\overset{\rho\rho}{\varepsilon\varepsilon}^{\prime}) = \Sigma} \quad \mathbf{K}_f = \mathbf{A} \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} + \Sigma \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_{\phi f} = E\left(\overset{\rho}{\phi} \overset{\rho}{f}^{\prime}\right) = E\left(\overset{\rho}{\phi} (\mathbf{A} \overset{\rho}{\phi} + \overset{\rho}{\varepsilon})^{\prime}\right) = E(\overset{\rho\rho}{\phi\phi}^{\prime} \mathbf{A}^{\prime}) = \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} \quad (19)$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} (\mathbf{A} \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} + \Sigma)^{-1} \quad \overset{\rho}{\phi} = \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} (\mathbf{A} \mathbf{K}_{\phi} \mathbf{A}^{\prime} + \Sigma)^{-1} \overset{\rho}{f}^* \quad ! \text{OE}$$

# Нейронные сети как нелинейный регрессионный метод решения обратных задач



$$y_l = f^2 \left( \sum_{k=1, n_h} W_i^{2,l} \left( f^1 \left( \sum_{j=1, n_x} W_j^{1,k} x_j + b_k^1 \right) \right) + b_l^2 \right), \quad l = 1, n_y$$

$$\vec{\tilde{x}}_{i_s} = (\tilde{x}_1^{i_s}, \tilde{x}_2^{i_s}, \dots, \tilde{x}_{n_x}^{i_s}) \quad \vec{\tilde{y}}_{i_s} = (\tilde{y}_1^{i_s}, \tilde{y}_2^{i_s}, \dots, \tilde{y}_{n_y}^{i_s})$$

$$x_{i_x} = 2(\tilde{x}_{i_x} - x_{i_x}^{min})(x_{i_x}^{max} - x_{i_x}^{min}) - 1 \quad (3)$$

$$y_{i_y} = 2(\tilde{y}_{i_y} - y_{i_y}^{min})(y_{i_y}^{max} - y_{i_y}^{min}) - 1 \quad (3a)$$

$$y_{i_y}(\vec{x}) = f\left(b2_{i_y} + \sum_{i_h=1}^{n_h} w2_{i_y, i_h} \times f(b1_{i_h} + \sum_{i_x=1}^{n_x} w1_{i_h, i_x} \times x_{i_x})\right) \quad (4)$$

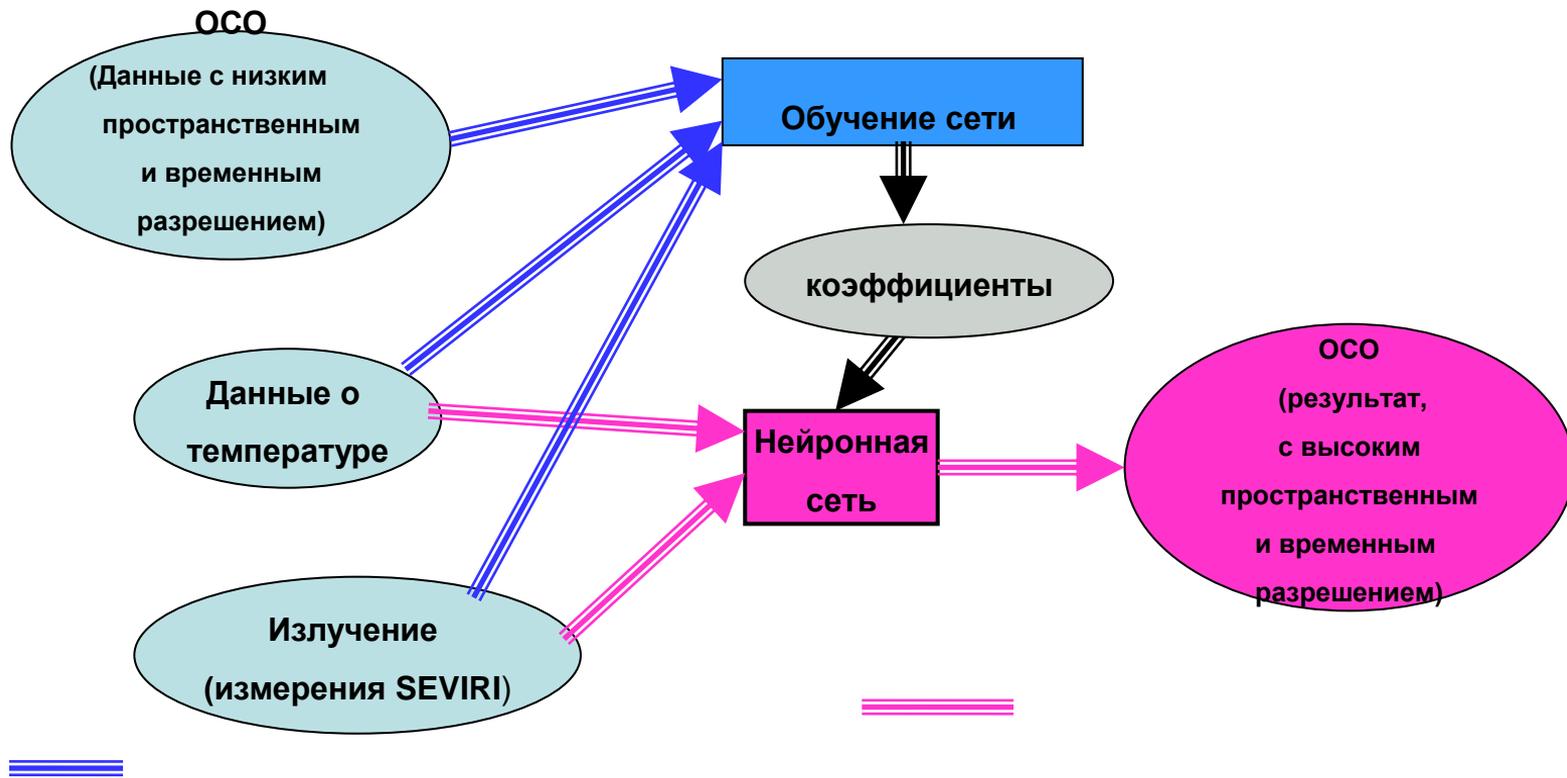
$$L(\vec{b1}, \vec{b2}, \vec{w1}, \vec{w2}) = \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} (y_{i_y}(\vec{x}_{i_s}) - y_{i_y}^{i_s})^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\vec{a} = (b2_{i_y}, w2_{i_y, i_h}, b1_{i_h}, w1_{h, i_x})$$

$$L(\vec{a}) \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = 2 \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} (y_{i_y}(\vec{x}_{i_s}) - y_{i_y}^{i_s}) \frac{\partial y_{i_y}}{\partial a_i}(\vec{x}_{i_s}) \quad (6)$$

# Основные потоки данных при обучении сети и решении обратной задачи определения ОСО



Обучение сети

Тест или обработка измерений

## Использование метода ИНС при восстановлении вертикальных профилей атмосферных параметров

$$y_l = f^2 \left( \sum_{k=1, n_h} W_i^{2,l} \left( f^1 \left( \sum_{j=1, n_x} W_j^{1,k} x_j + b_k^1 \right) \right) + b_l^2 \right), \quad l = 1, n_y$$

1 !  $N = (n_x + 1)n_h + (n_h + 1)n_y \quad n_x = 40, n_h = 30, n_y = 20 \Rightarrow N = 1850.$

2 ! погрешности

$$L(\vec{b1}, \vec{b2}, \vec{w1}, \vec{w2}) = \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} (y_{i_y}(\vec{x}_{i_s}) - y_{i_y}^{i_s})^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

$$L(\vec{b1}, \vec{b2}, \vec{w1}, \vec{w2}) = \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} (\tilde{y}_{i_y}(\vec{x}_{i_s}) - \tilde{y}_{i_y}^{i_s})^2 \rightarrow \min \quad (7)$$

$$L(\vec{b1}, \vec{b2}, \vec{w1}, \vec{w2}) = \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} \left( (y_{i_y}(\vec{x}_{i_s}) - y_{i_y}^{i_s}) w_{i_y} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$w_{i_y} = (y_{i_y}^{max} - y_{i_y}^{min})/2 \quad (9)$$

$$(6) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial a_i} = 2 \sum_{i_s}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} (y_{i_y}(\vec{x}_{i_s}) - y_{i_y}^{i_s}) w_{i_y} \frac{\partial y_{i_y}}{\partial a_i}(\vec{x}_{i_s}) \quad (10)$$

1 и 2:      Базис ЭОФ:     $\vec{T}(\vec{x}_{i_s}) = \vec{T} + \mathbf{V}\vec{y}(\vec{x}_{i_s})$       (12)

$$L(\vec{b1}, \vec{b2}, \vec{w1}, \vec{w2}) = \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} \left( (\vec{T}(\vec{x}_{i_s}) - \vec{T}_{i_s})(y_{i_y}^{max} - y_{i_y}^{min})/2 \right)^2 \rightarrow \min,$$

(11)

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \sum_{i_s=1}^{n_s} \sum_{i_y=1}^{n_y} (\vec{T}(\vec{x}_{i_s}) - \vec{T}_{i_s}) \mathbf{V}(\vec{y}_{max} - \vec{y}_{min}) \frac{\partial y_{i_y}}{\partial a_i}(\vec{x}_{i_s}) \quad (13)$$

# Пример применения методики – восстановление $T(z)$ по данным МТВЗА

(5-6) I,

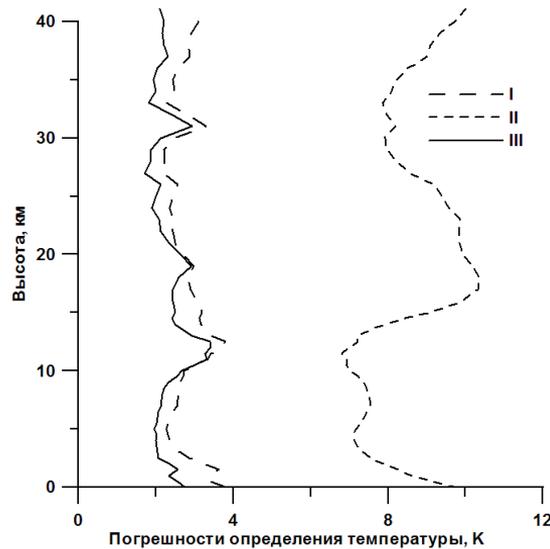
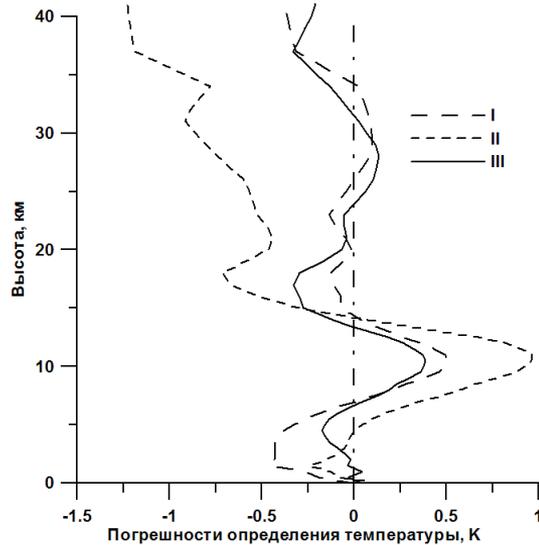
(7-10) II,

(11 – 13) III

3-15 мин/шаг, > 100 циклов, 18 суток

1 мин/шаг, 8 циклов, 7 часов

0.5 мин/шаг, 5 циклов, 2 часа

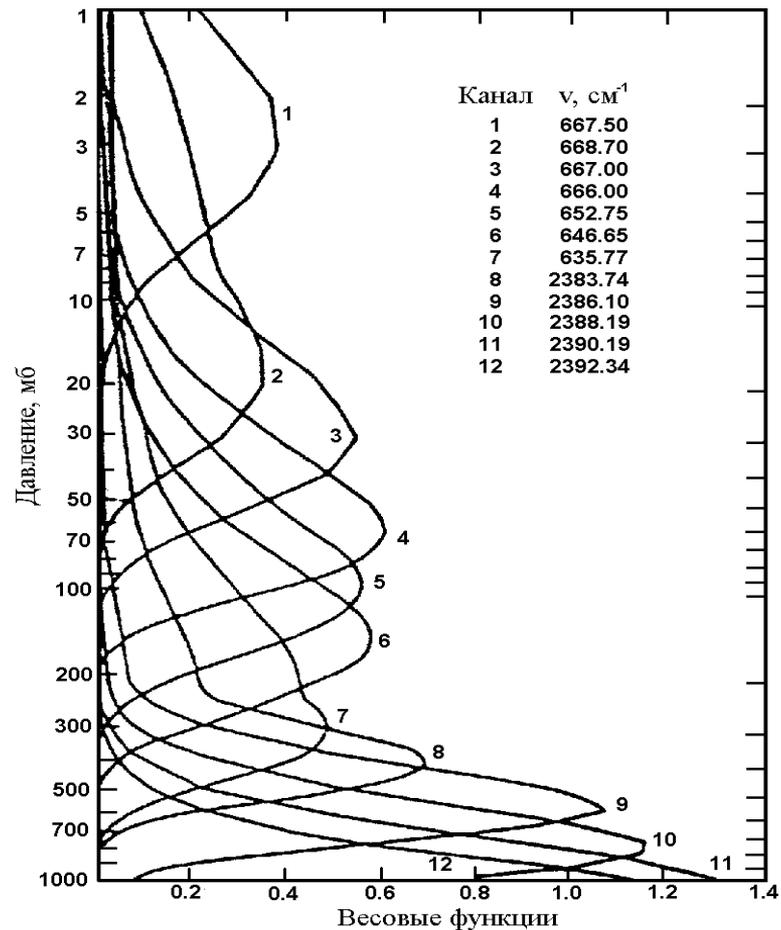


## Итерационные методы решения обратных задач – метод Шахина

$$f(y) = \int_a^b K(x, y) \varphi(x) dx \quad (1)$$

$$f(y_i) = \int_a^b K(x, y_i) \varphi(x) dx, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\varphi_k(x) \longrightarrow f_k(y_i) \text{ ? } f^*(y_i) \longrightarrow \varphi_{k+1}(x_i)$$



$$f(y_i) = \int_a^b K(x, y_i) \varphi(x) dx, \quad i = 1, \dots, m$$

Теорема о среднем



$$f(y_i) = \varphi(x_i) \int_a^b K(x, y_i) dx = \varphi(x_i) A_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Пусть  $\varphi_k$  - приближенное решение

$$f_i(\varphi_k) = f(\varphi_k)(y_i) = \varphi_k(x_i) A_i \quad (a)$$

А для точного решения  $\varphi$

$$f_i(\varphi) = f(\varphi)(y_i) = \varphi(x_i) A_i \quad (б)$$

$$f(\varphi)(y_i) = f_i$$

Разделив (а) на (б) и решив то, что получится, относительно  $\varphi(x_i)$ , получим уточнение решения  $\varphi_k$ . Обозначим его  $\varphi_{k+1}$ .

Шаг алгоритма



...

$$\varphi_{k+1}(x_i) = \varphi_k(x_i) \frac{f^*(y_i)}{f_k(y_i)}$$

ОСТАНОВ

$$|f_k(y_i) - f^*(y_i)| \leq \sigma$$

$$\|\vec{\varphi}_{k+1} - \vec{\varphi}_1\| < \delta$$

## Оценка вертикальной разрешающей способности дистанционных измерений

Задача спектроскопии

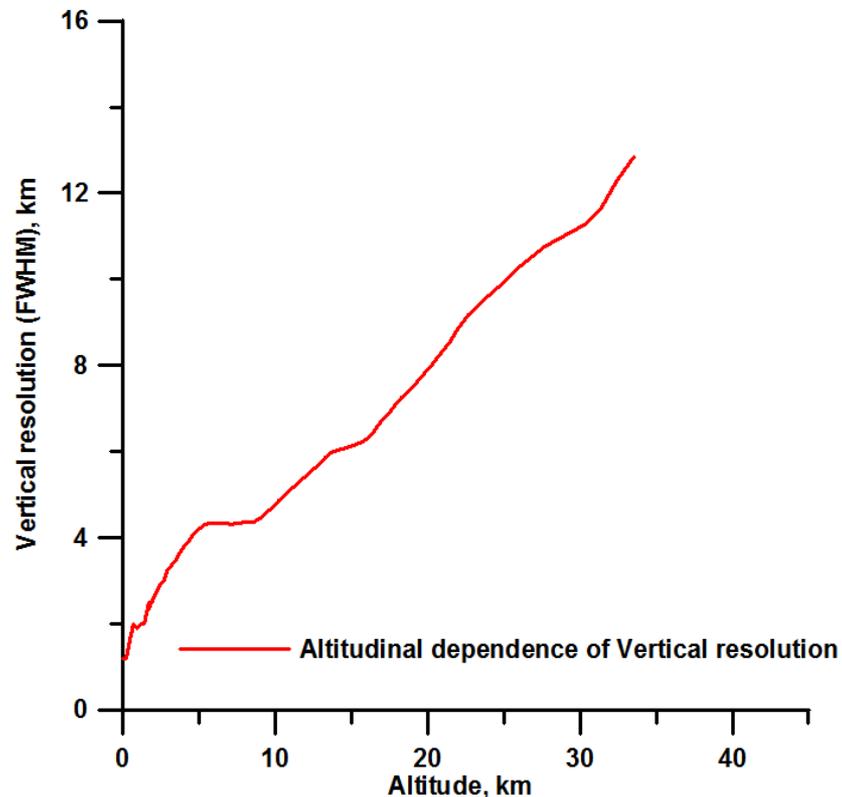
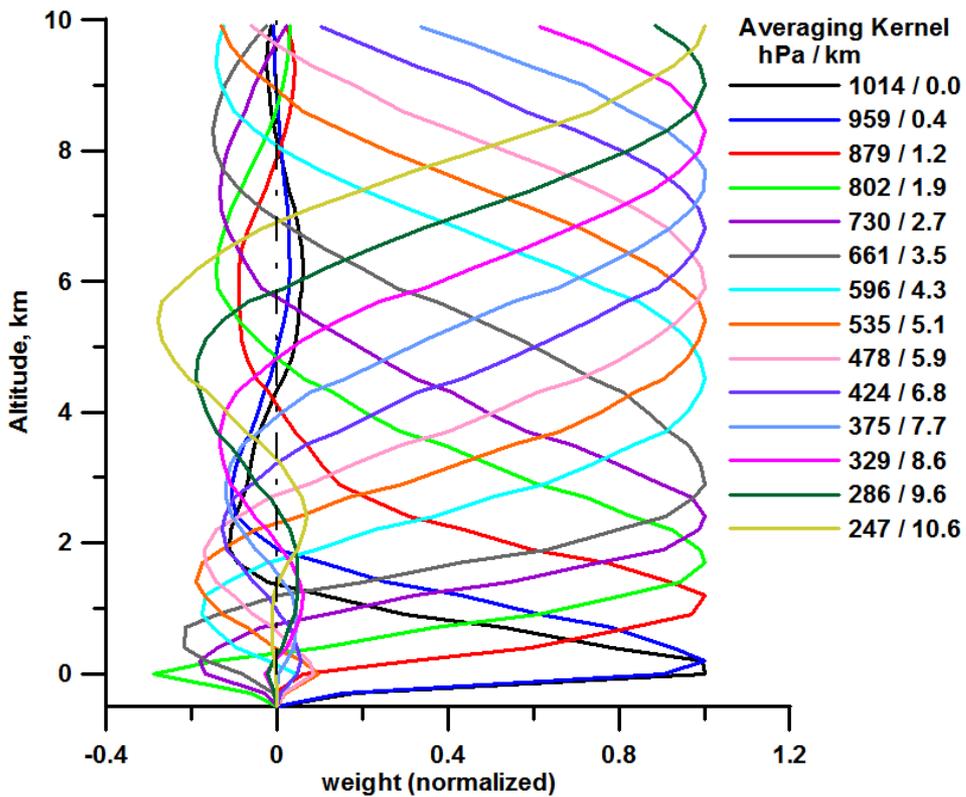
$$f^*(\nu') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) A(\nu - \nu') d\nu$$

Обратная задача атм. оптики

$$\mathbf{A} \vec{\rho} = \vec{f}, \quad \vec{f}^* = \vec{f} + \vec{\varepsilon} \longrightarrow \vec{\tilde{\varphi}} = \mathbf{R} \mathbf{A} \vec{\varphi}$$

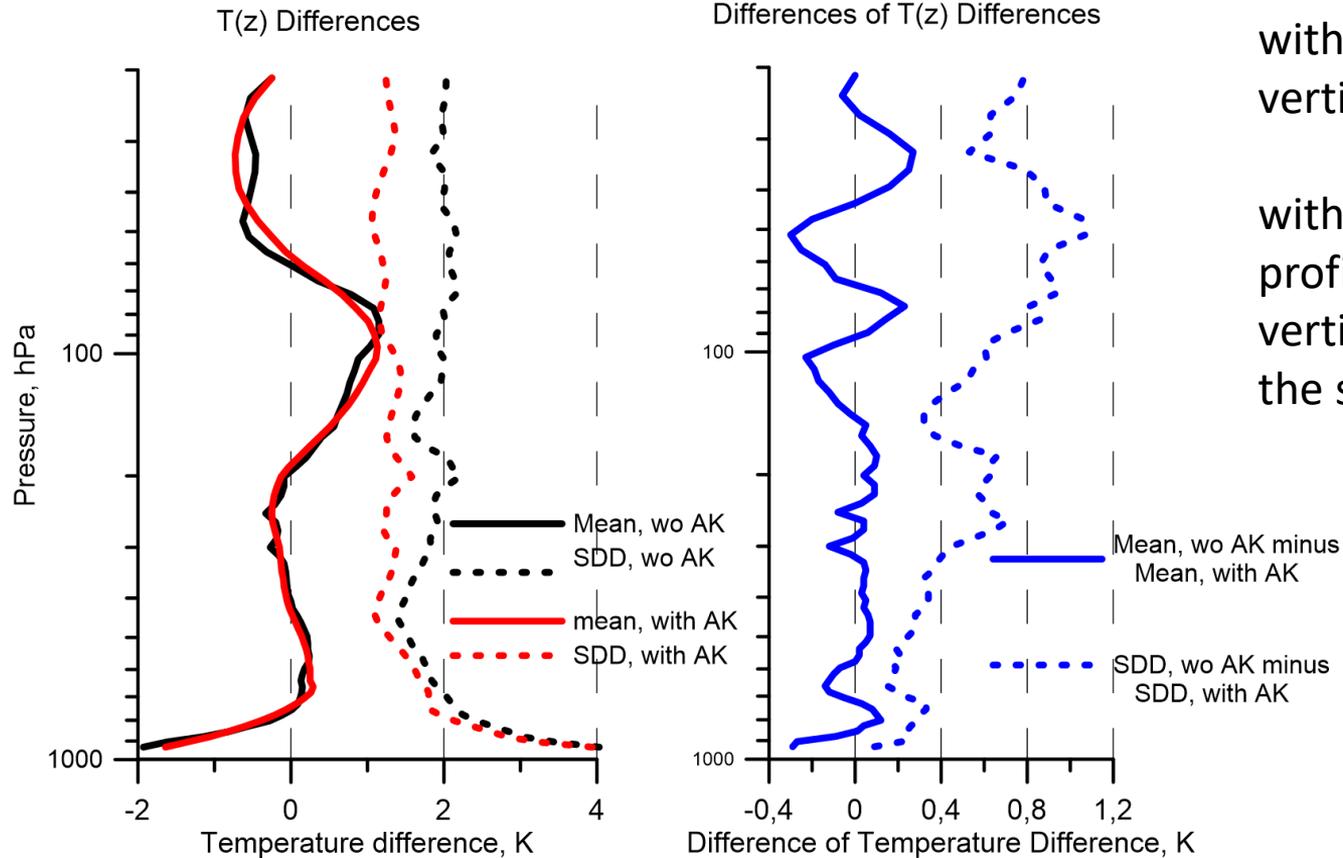
Пример – T(z) ИКФС-2

# Averaging kernels and vertical resolution of our method in the troposphere temperature profile retrieval



# Accounting for different vertical resolution

IKFS-2 minus Radiosondes, 2015/11 - 2016/11, 1.5 hour, 100 km, S < 1.5



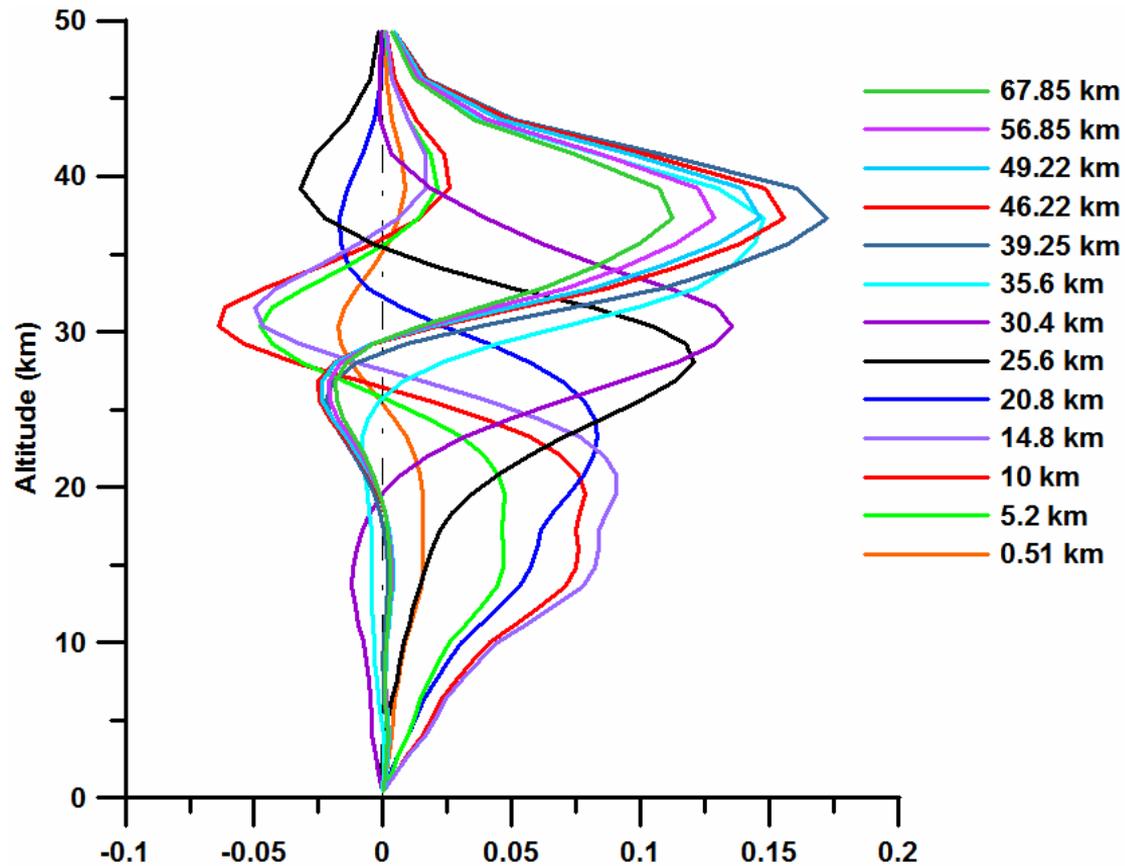
without AK – original vertical resolution

with AK – radiosonde profiles are reformed to vertical resolution of the satellite data

ITSC-XXI, 29 November - 5 December, 2017, Darmstadt,

Germany

# HF averaging kernels for 23.04.2011.



Брюкер, прозрачность по Солнцу с поверхности

## Подход Бэкуса-Гильберта

$$f_i = \int A_i(x)\varphi(x)dx, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x)f_i \quad (3)$$

$$\longrightarrow \tilde{\varphi}(x) = \int H(x, x')\varphi(x')dx' \quad (4)$$

$$H(x, x') = \sum_{i=1}^n h_i(x)A_i(x') \quad (5)$$

$$H(x, x') = \delta(x' - x_{oi}) \quad \longrightarrow \quad \tilde{\varphi}(x_{oi}) = \varphi(x_{oi})$$

$$S(x) = N \int (x' - x)^2 H^2(x, x') dx'$$

$H(x, x')$  - Прямоугольник ширины  $l$ ,  $\int H(x, x') dx' = 1$  (7)

$$S(x) = N \int_{x-l/2}^{x+l/2} (x - x')^2 \frac{1}{l^2} dx' = \frac{N \times l}{12} \longrightarrow N = 12$$

$$S(x) \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= 12 \int (x'-x)^2 \left( \sum_{i=1}^n h_i(x) A_i(x') \right)^2 dx' = \\
&= 12 \int (x'-x)^2 \left( \sum_{i=1}^n h_i(x) A_i(x') \right) \left( \sum_{j=1}^n h_j(x) A_j(x') \right) dx' = \\
&= 12 \sum_{i,j=1}^n h_i(x) h_j(x) \int (x'-x)^2 A_i(x') A_j(x') dx' = 12 \overset{\rho}{h}'(x) \mathbf{K} \overset{\rho}{h}(x),
\end{aligned}$$

$$k_{i,j} = \int (x'-x)^2 A_i(x') A_j(x') dx'$$

$$(7) \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n h_i(x) \int A_i(x') dx' = \overset{\rho}{h}'(x) \overset{\rho}{a} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}(x) = \arg \min \hat{h}'(x) \mathbf{K} \hat{h}(x) \\ \hat{h}'(x) \hat{a} = 1 \end{array} \right.$$



$$\hat{h}(x) = \frac{\mathbf{K}^{-1} \hat{a}}{\hat{a}' \mathbf{K}^{-1} \hat{a}}$$

$$\sigma_{\varphi}^2(x) = \hat{h}'(x) \mathbf{\Sigma} \hat{h}(x)$$

$$Q(x) = qS(x) + (1-q)\gamma \sigma_{\varphi}^2(x)$$

## методы решения нелинейных обратных задач

Линейная задача

$$f^*(y) = \int_a^b A(x, y) \varphi(x) dx + \varepsilon(y) \quad \longleftrightarrow$$

Нелинейная задача

$$f^* = \mathbf{A}(\varphi) + \varepsilon \quad \mathbf{R}^n \longrightarrow \square$$

$$\vec{\varphi} = (T_1, T_2, \dots, T_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_n, q_1^{O_3}, q_2^{O_3}, \dots, q_n^{O_3})$$

**МНК:**  $\varphi = \arg \min_{\varphi \in \mathbf{R}^n} \left\| f^* - \mathbf{A}\varphi \right\|_S^2 \quad \longleftrightarrow \quad \varphi = \arg \min_{\varphi \in \mathbf{R}^n} \left\| \mathbf{A}(\varphi) - f^* \right\|_{\Sigma^{-1}}^2 \quad (3)$

Регуляризация Тихонова

$$\varphi = \arg \min_{\varphi} \left( \left\| f^* - \mathbf{A}\varphi \right\|_S^2 + \lambda \left\| \varphi \right\|_{\mathbf{H}}^2 \right) \quad \longleftrightarrow \quad \varphi = \arg \min_{\varphi \in \mathbf{R}^n} \left( \left\| \mathbf{A}(\varphi) - f^* \right\|_{\Sigma^{-1}}^2 + \alpha \left\| \varphi \right\|_{\mathbf{H}}^2 \right) \quad (4)$$

## Статрегуляризация (optimal estimation)

$$P(\varphi / f^*) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\|f^* - \mathbf{A}\varphi\|_{\Sigma^{-1}}^2 - \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2\right) \rightarrow \max$$

$$\frac{1}{2}\|f^* - \mathbf{A}\varphi\|_{\Sigma^{-1}}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2 \rightarrow \min \quad \longleftrightarrow \quad \varphi = \arg \min_{\varphi \in \mathbf{R}^n} \left( \|\mathbf{A}(\varphi) - f^*\|_{\Sigma^{-1}}^2 + \|\varphi\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2 \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{x} = E(\mathbf{x}) \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad \mathbf{D} = E(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \quad \boldsymbol{\Sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'$$

(Y-4)

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}) = \left\| \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{y} \right\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2 + \left\| \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \right\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2 \rightarrow \min$$

Локальная линеаризация около  $\hat{\mathbf{x}}_k$



$$\Phi_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) = \left\| \mathbf{A}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k) + B(\hat{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{y} \right\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2 + \left\| \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}} \right\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2 \rightarrow \min$$

нелинейность



$$\Phi_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) = \left\| \mathbf{A}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k) + B(\hat{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{y} \right\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2 + \left\| \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}} \right\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2 + \left\| \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k \right\|_{\mathbf{L}^{-1}} \rightarrow \min$$

## Шаг алгоритма

Пусть  $k$ -е приближение к решению уже получено. Число  $l$  имеет некоторое текущее значение.

1. По одной из формул (У-5 или У-6) рассчитаем  $x_{k+1}$ .

$$\hat{x}_{k+1}^p = \hat{x}_k^p + (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{L}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'\Sigma^{-1}(\hat{y}^p - \mathbf{B}(\hat{x}_k^p)) + \mathbf{D}^{-1}(\hat{x} - \hat{x}_k^p)) \quad (\text{У } 5)$$

$$\hat{x}_{k+1}^p = \hat{x} + (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{L}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'\Sigma^{-1}(\hat{y}^p - \mathbf{B}(\hat{x}_k^p)) + \mathbf{A}(\hat{x}_k^p - \hat{x})) + \mathbf{L}^{-1}(\hat{x}_k^p - \hat{x}) \quad (\text{У } 6)$$

2. Для полученного вектора  $\hat{x}_{k+1}^p$  рассчитаем значение минимизируемой (целевой, ценовой) функции  $\Phi(\hat{x}_{k+1}^p)$  и сравним его с  $\Phi(\hat{x}_k^p)$ .

Если  $\Phi(\hat{x}_{k+1}^p) \geq \Phi(\hat{x}_k^p)$ , уменьшаем число  $l$  и снова выполняем п. 1.

Если  $\Phi(\hat{x}_{k+1}^p) < \Phi(\hat{x}_k^p)$ , то шаг алгоритма завершен - принимаем  $\hat{x}_{k+1}^p$  за следующее приближение к решению, т.е. увеличиваем  $k$  на единицу.

3. Если на двух (только что выполненной и предыдущей) итерациях число  $l$  не изменялось, увеличиваем его вдвое.

## Критерий останова

1)  $K < N$

2)  $\|x_{k+1}^p - x_k^p\|_{\tilde{\mathbf{D}}^{-1}} < d$

3)  $\| \mathbf{A}(\varphi) - f^* \|_{\Sigma^{-1}}^2 < e$

# Информативность косвенных измерений и оптимизация эксперимента

Оператор прямой задачи  
Число сп. каналов  
Спектральное разрешение  
Аппаратная функция  
Погрешность спектральных измерений  
Время измерений  
Геометрия измерений:  
    Число приц. высот, углов и пр.  
Угловое (пространственное) разрешение  
.....



Качество измерений:  
Погрешности,  
пространственное разрешение и т.д.  
=  
информативность

## Количественные меры информативности косвенных измерений

априорная  
ковариационная  
матрица  $\mathbf{D}$



апостериорная  
матрица (ошибок)  $\tilde{\mathbf{D}}$

$$R = Tr(\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{D}}) \quad (1)$$

$$F = \frac{Tr(\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{D}})}{Tr \mathbf{D}} \quad (2)$$

$$U = \left( \frac{Tr \tilde{\mathbf{D}}}{n} \right)^{1/2} \quad (3)$$

$$R = Tr(\mathbf{D}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}) \quad (4)$$

При нулевой ошибке

**! Опечатка в книжке !**

## Коэффициент восстановления

$$\Phi(x) = \left( \frac{\tilde{\sigma}_\varphi^2(x)}{\sigma_\varphi^2(x)} \right)^{1/2}$$

где  $\sigma_\varphi^2(x)$  и  $\tilde{\sigma}_\varphi^2(x)$  – диагональные элементы матриц  $\mathbf{D}$  и  $\tilde{\mathbf{D}}$ ,

$$\Psi(x) = \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}_\varphi^2(x)}{\sigma_\varphi^2(x)} \right)^{1/2}$$

Можно использовать  $\tilde{\mathbf{D}}$ ,  $|\tilde{\mathbf{D}}|$ ,  $\max_i \sigma_i^2$  и пр.

Число независимых параметров

Число степеней свободы сигнала/шума

Количество информации

Информационный объем

## Энтропия

$$I = - \sum_{j=1}^n P_j \log P_j$$

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = 1/n \quad \longrightarrow \quad I \text{ максимальна}$$

$$P_0(\varphi) + f^* \longrightarrow P(\varphi / f^*) \quad \Delta I \text{ -уменьшение энтропии = приращение информации}$$

$$\Delta I(\varphi) = \sum_{j=1}^n \int P(\varphi_j / f^*) \log P(\varphi_j / f^*) d\varphi_j - \sum_{j=1}^n \int P_0(\varphi_j) \log P_0(\varphi_j) d\varphi_j \quad (8)$$

нормировка

$$\sum_{j=1}^n \int P_0(\varphi_j) d\varphi_j = 1$$

$$\bar{\Delta I}(\rho) = \sum_{j=1}^n \int P(f^*) \Delta I(\varphi_j) df^* \quad (9) \quad , \text{ где } P(f^*) = \sum_{j=1}^n \int P(f^* / \varphi_j) P_0(\varphi_j) d\varphi_j \quad (10)$$

$$\bar{\Delta I}(\rho) = \sum_{j=1}^n \int P(f^* / \varphi_j) P_0(\varphi_j) \log \frac{P(f^* / \varphi_j)}{P(f^*)} df^* d\varphi_j \quad (11) \quad (\text{вместо 9})$$

## Нормальное распределение

$$P_0(\boldsymbol{\rho}) = \frac{|\mathbf{K}_\varphi|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{K}_\varphi^{-1}\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})\right) \quad (12)$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\rho} = \overset{\nu}{f}, \quad \overset{\nu}{f}^* = \overset{\nu}{f} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}_f = \mathbf{A}\mathbf{K}_\varphi\mathbf{A}' \quad (14)$$

Пусть для простоты  $\mathbf{K}_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_m \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}_f = \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_\varepsilon \quad (16)$

$$I(\boldsymbol{\rho}, \overset{\nu}{f}^*) = \frac{1}{2} \left( \log(|\mathbf{K}_\varphi| |\tilde{\mathbf{K}}_f|) - \log |\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi f}| \right) \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi f} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_\varphi & \mathbf{K}_\varphi\mathbf{A}' \\ \mathbf{A}\mathbf{K}_\varphi & \tilde{\mathbf{K}}_f \end{vmatrix} \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad |\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi f}| = |\mathbf{K}_\varphi| |\tilde{\mathbf{K}}_f| \quad (19)$$

$$(17) \quad \longrightarrow \quad I(\varphi, f^*) = \frac{1}{2} \log \frac{|\tilde{\mathbf{K}}_f|}{(\sigma_\varepsilon^2)^m} \quad (20)$$

$$I(\varphi, f^*) = \frac{1}{2} \log \frac{|\mathbf{K}_\varphi|}{|\tilde{\mathbf{K}}_\varphi|} \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} = (\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \quad (23) \quad \longrightarrow \quad \Delta I(\varphi, f^*) = \log \frac{|\mathbf{D}|}{|(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})^{-1}|} \quad (24)$$

$$\frac{|\mathbf{D}|}{|(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})^{-1}|} = |\mathbf{D}| |(\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1})| = |\mathbf{DF} + \mathbf{I}|$$

$$\longrightarrow \quad \Delta I(\varphi, f^*) = \log |\mathbf{DF} + \mathbf{I}| \quad (26)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

Информационная матрица Козлова

$$\det \mathbf{B} = |\mathbf{B}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \longrightarrow \quad \Delta I(\phi^{\rho}, f^{\rho*}) = 1/2 \log \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \quad (30)$$

Ошибка в книжке - 1/2

$$V^2 = \prod_{i=1}^r \lambda_i$$

$$r = \max \{i : \lambda_i \geq 1\}$$

Информационный объем Козлова

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}^{-1} \quad \psi_i^{\rho*} = A\psi_i^{\rho}, \quad i = 1, \dots, \min(m, n)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$$



$$\mathbf{C}^* = \sigma^{-2} \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'$$



$$\mathbf{C}^* = \frac{\mathbf{K}_f}{\sigma^2},$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'$$

Кроме количества информации часто используется такая информационная характеристика, как число степеней свободы сигнала  $d_s$  и шума  $d_n$ . Эта величина, как и количество собственных чисел матрицы Козлова, представляет количество независимых компонент информации, но в полезном сигнале  $d_s$  и шуме  $d_n$  по-отдельности. Вычислить число степеней свободы можно из собственных чисел матрицы Козлова

$$d_s = \sum_{i=1}^m \lambda_i / (1 + \lambda_i); \quad d_n = \sum_{i=1}^m 1 / (1 + \lambda_i)$$

Кроме того, часто используется тот факт, что  $d_s = \sum h_{i,i}$ , где  $H = \{h_{i,j}\} = RA$  – осредняющее ядро.

## ***«стандартный» анализ эксперимента***

- 1) Погрешности восстановления (абсолютные, относительные и т.д.)
- 2) Вертикальные ковариации погрешностей восстановления
- 3) Вертикальное разрешение измерений (его высотный ход и поведение осредняющих ядер)
- 4) Прирост информации (количество информации) содержащейся в измерениях: по Шеннону и информационный объем по Козлову
- 5) Число степеней свободы в измерениях – сигнала и шума

## анализ погрешности

- А) Погрешности измерений
- В) Влияние неопределенности мешающих газов и других параметров (температура, излучательная способность, спектроскопическая информация и т.д.)
- С) Вертикальное осреднение (smoothing error)

$$\varepsilon_{\varphi}^{\rho} = \hat{\varphi} - \varphi$$

$$\varepsilon_{\varphi}^{\rho} = Rf^{*} - \varphi = (RA - I)\varphi + R\varepsilon + RA_b \delta b$$

С

А

В

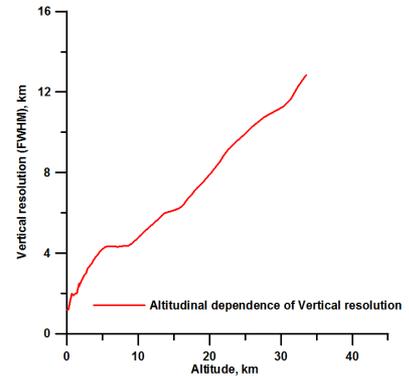
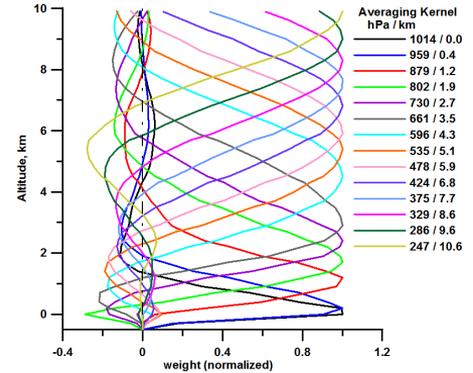
# вертикальное разрешение

RA

FWHM

$$S(x) = N \int (x' - x)^2 (RA)^2(x, x') dx'$$

Smoothing error:



Smoothing error:

$$U = \int_0^{\infty} \rho(z) dz \approx \int_0^{\infty} (\bar{\rho}(z) + \delta\tilde{\rho}(z)) dz = \bar{U} + \delta\tilde{U} \quad (1)$$

$$\delta\tilde{U} = \int_0^{\infty} (RA(\delta\rho)) dz \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} (RA(\delta\rho)) dz = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} RA(z, z') (\delta\rho(z')) dz' dz \quad (3)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} RA(z, z') (\delta\rho(z')) dz dz' = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} RA(z, z') dz \right) \delta\rho(z') dz' \quad (4)$$

$$\left( \int_0^{\infty} RA(z, z') dz \right) = w(z'), \quad \delta\tilde{U} = \int_0^{\infty} w(z) \delta\rho(z) dz, \quad (5)$$

$$\tilde{U} - U = \int_0^{\infty} (1 - w(z)) \delta\rho(z) dz$$

## Информационные характеристики эксперимента

$$\Delta I = 0.5 \log(|D|/|\tilde{D}|) \quad \Delta I(\rho, f^*) = \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda_i)$$

$$V^2 = \prod_{i=1}^r \lambda_i \quad \lambda_i > 1, \quad i < r$$

$$d_s = \sum_{i=1}^m \lambda_i / (1 + \lambda_i) \quad d_s = \text{Tr}(RA)$$

$$(\lambda_i^R)^2 = \lambda_i$$

# Оптимизация условий измерений

## Алгоритмы выбора положения спектральных каналов

$$\{y_i\}_{i=1,\dots,m}$$

Из  $M$  точек на  $[c,d]$

$$C_M^m = \frac{M!}{m!(M-m)!}$$

$m$

$m$	$M = 20$	$M = 100$
1	20	100
2	190	4 950
3	1 140	16 170
4	4 845	3 921 225
5	15 504	75 287 520
...	...	...
10	184 756	17 310 309 456 440

## Отбор оптимальных подмножеств спектральных каналов измерений

$$\hat{D} = (A' \Sigma^{-1} A + D^{-1})^{-1} \quad (1)$$

$$\hat{D} = D - DA'(\sigma^2 + ADA')^{-1} AD \quad (2)$$

$$\Delta I = \frac{1}{2} (\ln |D| - \ln |\hat{D}|) \quad (3)$$

$$\Delta I = \frac{1}{2} \ln \frac{|D|}{|\hat{D}|} = \frac{1}{2} \ln \frac{|D|}{\left| D \left( I - A'(DA')' / (\sigma^2 + (DA')A') \right) \right|} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - \frac{(DA')' A'}{\sigma^2 + (DA')' A'}} = \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln (1 + \sigma^{-2} (DA')' A') = \frac{1}{2} \ln (1 + \sigma^{-2} ADA')$$

$$\hat{D} = D - DA'(\sigma^2 + ADA')^{-1}AD = D - DA'(DA')' / (\sigma^2 + ADA') = D(I - \frac{A'AD}{\sigma^2 + ADA'}) \quad (5)$$

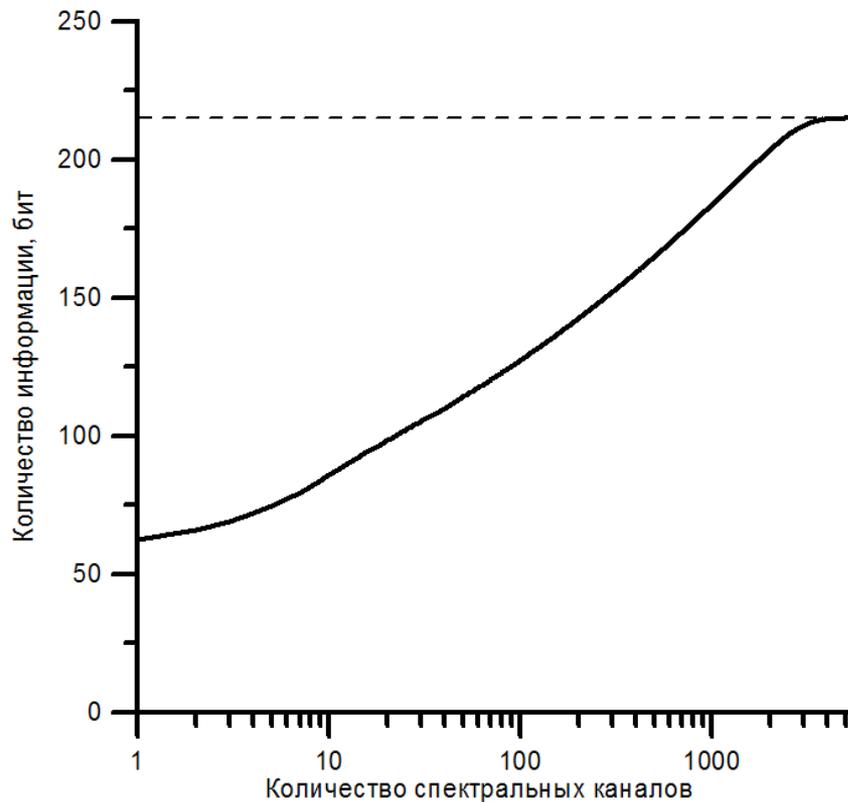
Использовалось:

$$|AB| = |A||B| \quad |I + ab'| = 1 + b'a$$

$ADA'$ ,  $\Sigma$  – матрицы 1x1, т.е. числа.

Пример – ИКФС-2:

73 предварительно выбранных каналов +



## Методы построения оптимальных планов

Методика ВП Козлова построения оптимального плана (ИК диапазон)

$$\sigma_\varepsilon \sim \frac{1}{\Delta v \sqrt{t}}$$

$$\beta^{\text{opt}} = \arg \min_{\beta} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}(\beta))$$

$$\beta^{\text{opt}} = \arg \min_{\beta} |\tilde{\mathbf{D}}(\beta)|$$

$$\beta^{\text{opt}} = \arg \min_{\beta} \Psi(\tilde{\mathbf{D}}(\beta))$$

$$f(y) = \int_a^b A(x, y) \varphi(x) dx \qquad f_i = \int_{v_{1i}}^{v_{2i}} \rho_i(y) f(y) dy \qquad (6)$$

  $f_i = \int_{v_{1i}}^{v_{2i}} \rho_i(y) \int_a^b A(x, y) \varphi(x) dx dy = \qquad (7)$

$$= \sum_{j=1}^m \tilde{a}_i(x_j) \omega_j \varphi_j, \quad i = 1, \dots, n \qquad (8) \qquad \tilde{a}_i(x_j) = \int_{v_{1i}}^{v_{2i}} \rho_i(y) A(x_j, y) dy \qquad (9)$$

$$a_{i,j} = \tilde{a}_i(x_j) \omega_j \qquad \longrightarrow \qquad \underset{V}{f} = \mathbf{A} \underset{\rho}{\phi} \qquad (10)$$

$$0 \leq \rho_i(y) \leq 1 \qquad V^2 = \det \mathbf{C}^* = \det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}') \qquad (10)$$

$$\{\rho_i(y)\}_{i=1,\dots,n} \longrightarrow V = \det \mathbf{C}^* \rightarrow \max$$

$$\rho_i(y) = 0 \text{ или } 1$$

# Построение оптимального плана в МКВ диапазоне

AMSU

50–71 ГГц

3 МГц

→ 7001 интервал

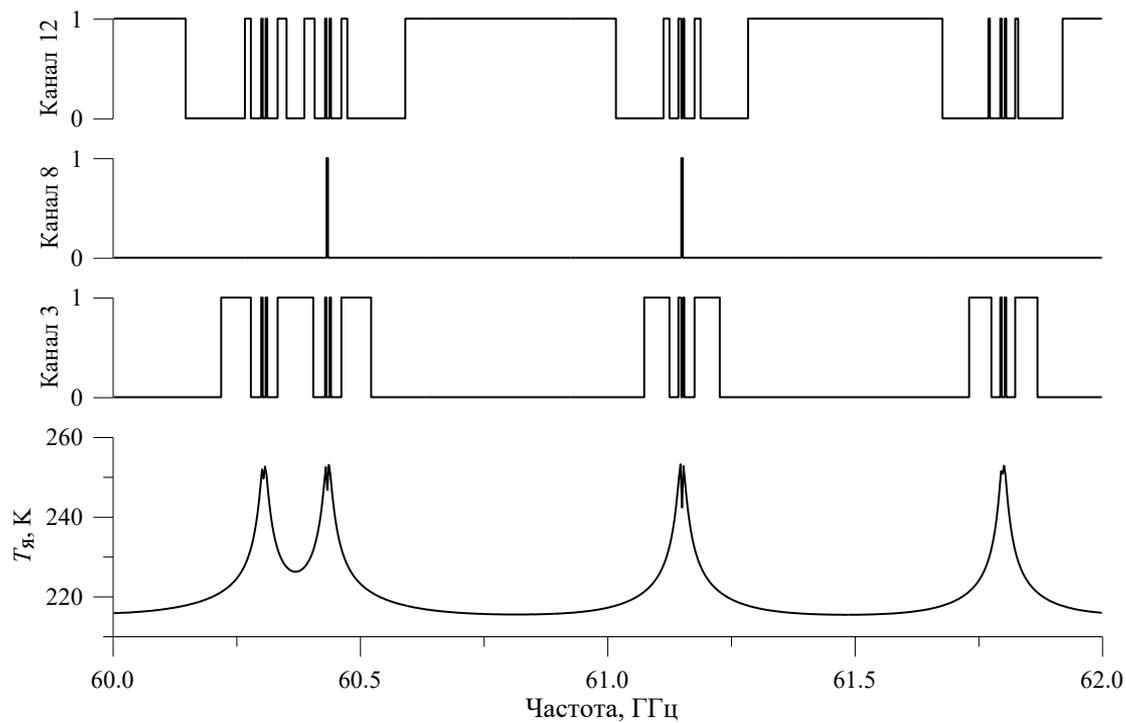
i	$\lambda_i$	i	$\lambda_i$	i	$\lambda_i$	i	$\lambda_i$
1	325984	6	2251,7	11	8,9115	16	0,0423
2	233572	7	976,92	12	2,9575	17	0,0118
3	42661	8	290,23	13	0,9998	18	0,0036
4	8859,1	9	88,662	14	0,4192	19	0,0017
5	5484,9	10	32,168	15	0,1433	20	0,0005

$\lambda_i > \sigma^2$   $\xrightarrow{2.5K}$  11 компонент

$$\{P_{i,j}\}_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$$

$x_{j,l}$  – матрица собств. векторов излучения

$$V = \left| \left\{ \frac{\sum_{l=1}^n P_{i,l} x_{j,l}}{\sum_{l=1}^n P_{i,l}} \right\}_{i,j=1,\dots,m} \right|^2 \rightarrow \max$$



Спектральная схема измерений	Информационный объем
AMSU	$0,25 \cdot 10^9$
Оптимальный план	$0,19 \cdot 10^{14}$
Полный радиационный эксперимент	$0,67 \cdot 10^{14}$