



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ  
"ОБРАЗОВАНИЕ"



**Проект «Инновационная образовательная среда в классическом университете»**

Пилотный проект № 22 «Разработка и внедрение  
инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет

Университетский научно-образовательный центр «Моделирование и мониторинг геосфер»,  
Кафедра физики атмосферы

**Н. М. Гаврилов**

# **ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ АТМОСФЕРНОЙ ДИНАМИКИ**

Учебно-методическое пособие

Санкт Петербург  
2007 г.

- Рецензент: проф. кафедры физики атмосферы, д.ф.м.н. Швед Г. М.
- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.
- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

## **ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ АТМОСФЕРНОЙ ДИНАМИКИ. – СПб., 2007**

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные физические принципы и численные методы, используемые при разработке численных гидродинамических моделей динамических процессов в атмосфере и океане. Большое внимание уделено анализу погрешностей, вносимых применением различных численных схем аппроксимации пространственных и временных операторов уравнений геофизической гидродинамики. Пособие предназначено для студентов 4-7-го курсов, аспирантов, соискателей и других обучающихся по специальности физика атмосферы и океана.

## Содержание

<b>1. Уравнения геофизических гидродинамических моделей</b> . . . . .	5
1.1. Основная система уравнений . . . . .	5
1.2. Обобщенная вертикальная координата . . . . .	6
1.3. Граничные условия . . . . .	7
1.4. Конкретные вертикальные координаты . . . . .	8
1.4.1. Изобарическая система координат . . . . .	8
1.4.2. $\theta$ -координата . . . . .	10
1.4.3. $\sigma$ -координата . . . . .	11
1.5. Преобразованная (нормированная) вертикальная координата . . . . .	11
1.6. Обобщенные криволинейные горизонтальные координаты . . . . .	13
1.7. Картографические проекции . . . . .	14
1.8. Теория подобия и анализ уравнений . . . . .	15
1.9. Порядки величин метеорологических элементов и их производных . . . . .	17
1.10. Фильтрующие свойства приближенных уравнений . . . . .	19
<b>2. Физические процессы в прогностических моделях</b> . . . . .	20
2.1. Солнечная и земная радиация . . . . .	21
2.2. Прогноз облачности и осадков . . . . .	22
2.3. Атмосферный пограничный слой . . . . .	23
2.4. Влияние океанов . . . . .	26
2.5. Параметризация процессов подсеточного масштаба . . . . .	26
2.6. Влияние условий на верхней границе атмосферы . . . . .	27
<b>3. Методы численного решения уравнений гидродинамики</b> . . . . .	29
3.1. Основы сеточного метода . . . . .	29
3.2. Конечно-разностные схемы . . . . .	30
3.3. Сходимость . . . . .	32
3.4. Устойчивость . . . . .	33
3.4.1. Прямой метод . . . . .	34
3.4.2. Энергетический метод . . . . .	34
3.4.3. Метод Неймана . . . . .	35
3.5. Схемы интегрирования по времени . . . . .	37
3.6. Двухуровневые схемы . . . . .	38
3.6.1. Типичные двухуровневые схемы . . . . .	38
3.6.2. Свойства схем на примере уравнения колебаний . . . . .	39
3.6.3. Свойства схем в приложении к уравнению трения . . . . .	44
3.7. Трехуровневые схемы . . . . .	45
3.7.1. Типичные трехуровневые схемы . . . . .	45
3.7.2. Трехуровневые схемы и вычислительные моды . . . . .	46
3.7.3. Устойчивость схемы центральных разностей . . . . .	47
3.7.4. Устойчивость и другие свойства схемы Адамса—Бэшфорта . . . . .	49
3.7.5. Свойства трехуровневых схем применительно к уравнению трения . . . . .	49
3.8. Комбинация схем . . . . .	50
3.9. Вычислительная дисперсия . . . . .	50
3.9.1. Схема с центральными пространственными разностями . . . . .	51

3.9.2. Схемы с нецентральными пространственными разностями . . . . .	54
3.9.3. Двумерное уравнение адвекции . . . . .	55
3.10. Нелинейная неустойчивость . . . . .	56
3.10.1. Ошибки ложного представления . . . . .	57
3.10.2. Механизм нелинейной неустойчивости . . . . .	58
3.10.3. Подавление и предотвращение нелинейной неустойчивости . . . . .	59
3.11. Уравнения для гравитационных и гравитационно-инерционных волн . . . . .	60
3.11.1. Одномерные гравитационные волны . . . . .	61
3.11.2. Гравитационно-инерционные волны . . . . .	63
3.11.3. Схема центральных разностей по времени . . . . .	66
3.11.4. Экономичные явные схемы . . . . .	68
3.11.5. Неявные схемы . . . . .	69
3.11.6. Полуявные схемы . . . . .	70
3.11.7. Метод расщепления (метод Марчука) . . . . .	72
3.12. Временные шумы и фильтрация по времени . . . . .	74
3.13. Диссипация в численных схемах . . . . .	76
3.14. Спектральный метод . . . . .	77
<b>4. Реальные численные модели динамики атмосферы . . . . .</b>	<b>80</b>
4.1. Трехмерная модель общей циркуляции средней атмосферы КОММА . . . . .	80
4.1.1. Физические основы модели . . . . .	80
4.1.2. Численная схема . . . . .	82
4.1.3. Параметризации гравитационных волн . . . . .	83
4.1.4. Результаты моделирования . . . . .	84
4.2. Модель мезомасштабной метеорологии HIRLAM. . . . .	86
4.3. Модель мезомасштабной метеорологии MM5 . . . . .	90

## 1. Уравнения геофизических гидродинамических моделей

В этом разделе рассматриваются некоторые вопросы преобразования уравнений гидродинамики атмосферы для их использования в численных моделях динамики атмосферы и океана. В частности, рассмотрено преобразование этих уравнений при использовании различных вертикальных координат. Рассмотрены также методы упрощения уравнений гидродинамики и следствия этих упрощений.

### 1.1. Основная система уравнений.

Если не учитывать трение и притоки тепла, то адиабатические движения достаточно крупного масштаба описываются стандартной системой уравнений в приближении гидростатики при выборе высоты  $z$  в качестве вертикальной координаты:

а) Уравнение движения для горизонтальной скорости

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} + f\vec{k} \times \vec{v}_h = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p + \vec{F}_h; \quad (1.1)$$

б) Уравнение гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho; \quad (1.2)$$

в) Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_h \cdot \rho \vec{v}_h + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0; \quad (1.3)$$

г) Уравнение притока тепла

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = \rho \varepsilon, \quad \text{или} \quad \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\rho \varepsilon}{c_p T}. \quad (1.4)$$

д) Определение потенциальной температуры

$$\theta = T (p_0/p)^\kappa, \quad \kappa = R/c_p; \quad (1.5)$$

е) Уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho RT. \quad (1.6)$$

В этих уравнениях использованы стандартные обозначения:  $\rho$ ,  $p$  и  $T$  – плотность, давление и температура, соответственно;  $\vec{v}_h = \vec{i}u + \vec{j}v$  и  $w$  – горизонтальная и вертикальная скорости;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  –

единичные векторы по горизонтальным осям  $x$ ,  $y$  и вертикальной оси  $z$ , соответственно;  $R$  – газовая постоянная для воздуха;  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

$$\nabla_h = \vec{i} \partial/\partial x + \vec{j} \partial/\partial y, \quad d/dt = \partial/\partial t + \vec{v}_h \square \nabla_h + w(\partial/\partial z) \quad (1.7)$$

- полная производная по времени, учитывающая перенос (адвекцию) субстанции ветром;  $\vec{F}_h$  - вязкие и другие силы, действующие на элементы среды в расчете на единицу массы;  $\mathcal{E}$  - полный удельный приток тепла. При рассмотрении различных вертикальных координат (см. ниже) уравнение гидростатики (1.2) является основным соотношением, связывающим высоту и давление.

## 1.2. Обобщенная вертикальная координата.

В численных моделях атмосферы в качестве вертикальной координаты вместо  $z$  часто используют другие переменные, например,  $p$  или  $\theta$ . Поэтому необходимо рассмотреть преобразование уравнений (1.1) – (1.4) при переходе к другим вертикальным координатам. Для общности рассмотрим произвольную обобщенную вертикальную координату  $s$ , которая может зависеть от других независимых пространственных переменных и от времени:

$$s = s(x, y, z, t). \quad (1.8)$$

Если зависимость  $s$  от  $z$  однозначна и монотонна, то можно выразить  $z$  через другие переменные:

$$z = z(x, y, s, t). \quad (1.9)$$

По правилам дифференцирования в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \right)_z = \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \right)_s - \frac{\partial s}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial \beta} \right)_s \frac{\partial}{\partial s}, \quad (1.10)$$

где  $\beta$  обозначает любую из переменных  $x$ ,  $y$  или  $t$ , а нижние индексы указывают, какую из вертикальных координат следует считать неизменной при частном дифференцировании. По определению полная производная по времени равна

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_s + \vec{v}_h \square \nabla_{hs} + \dot{s} \frac{\partial}{\partial s}, \quad (1.11)$$

где  $\dot{s} = ds/dt$  - аналог вертикальной скорости в новой системе координат. Подставляя (1.10) в (1.7), получаем

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_s + \bar{v}_h \square \nabla_{hs} + \left[ w - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s - \bar{v}_h \square \nabla_{hs} z \right] \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s}. \quad (1.12)$$

Сравнивая (1.12) и (1.11), получаем выражение для скорости изменения вертикальной координаты  $s$  выражение

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial z} \left[ w - \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)_s - \bar{v}_h \square \nabla_{hs} z \right]. \quad (1.13)$$

Сравнение (1.7) и (1.11) показывает, что единственное изменение в выражении для полной производной при введении вместо  $z$  новой вертикальной координаты  $s$  сводится к замене вертикальной скорости  $w$  на  $\dot{s}$ . Уравнение гидростатики (1.2) позволяет ввести новую гидродинамическую переменную

$$\Phi = gz, \quad (1.14)$$

которая называется *геопотенциалом* и широко используется в метеорологии. Подставляя первое соотношение (1.10) в (1.2) и вводя обозначение  $m$ , получаем уравнение гидростатики в виде

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial s} = - \frac{\partial p}{\partial s} = -m. \quad (1.15)$$

С учетом (1.10), (1.11) и (1.15) система уравнений (1.1), (1.3) и (1.4) преобразуется к виду

$$\frac{d\bar{v}_h}{dt} + f\bar{k} \times \bar{v}_h = - \frac{1}{\rho} \nabla_{hs} p - \nabla_{hs} \Phi + \bar{F}_h; \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla_{hs} \square m \bar{v}_h + \frac{\partial}{\partial s} (m \dot{s}) = 0; \quad (1.17)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = \rho \varepsilon, \quad \text{или} \quad \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\rho \varepsilon}{c_p T}. \quad (1.18)$$

Сравнение этих уравнений с (1.1) – (1.4) показывает, что уравнения гидродинамики при использовании новой вертикальной координаты имеют обычный вид с заменой  $\rho$  на  $m$  в уравнении неразрывности, вертикальной скорости  $w$  на  $\dot{s}$ , а также к появлению градиента геопотенциала в уравнении движения (1.16).

### 1.3. Граничные условия.

Для решения системы гидродинамических уравнений (1.15) – (1.18) необходимо добавить граничные условия на верхней и нижней границах области интегрирования. Обычно

предполагается сохранение полной массы атмосферы. Это требует равенства нулю потока массы на верхней границе атмосферы. При численном моделировании всегда приходится рассматривать атмосферу конечной высоты. Если верхняя граница модельной атмосферы совпадает с обобщенной координатной поверхностью  $s_T = \text{const}$ , условие сохранения полной массы требует равенства нулю вертикальной скорости на верхней границе:

$$\dot{s}_T = 0 \quad \text{при} \quad s = s_T \quad (1.19)$$

Это условие является приближенным, однако оно бывает приемлемым, когда возможно сдвинуть верхнюю границу области моделирования на достаточно большую высоту.

*Нижнее граничное условие* получается из кинематического условия равенства нулю нормальной к поверхности составляющей вектора скорости. Значение обобщенной вертикальной координаты  $s$  может меняться в пространстве и во времени, поэтому общее условие на нижней границе имеет вид

$$\dot{s}_L = \frac{\partial s_L}{\partial t} + v_{hL} \cdot \nabla s_L \quad \text{при} \quad s = s_L = s(x, y, H, t). \quad (1.20)$$

Здесь индекс  $L$  обозначает величины на нижней границе. Из-за неоднородности земной поверхности граничное значение  $s_L$  зависит от высоты земной поверхности  $H$ . В том случае, когда нижняя граница (земная поверхность) является координатной поверхностью  $s_L = \text{const}$ , условие (1.20) принимает вид

$$\dot{s}_L = 0 \quad \text{при} \quad s = s_L. \quad (1.21)$$

#### 1.4. Конкретные вертикальные координаты.

В п. 1.2 и 1.3 рассматривались уравнения гидродинамики и граничные условия для произвольной обобщенной вертикальной координаты  $s$ . В метеорологии и при численном моделировании атмосферных процессов в качестве вертикальной координаты часто используют функции, зависящие от давления, либо потенциальную температуру  $\theta$ . Рассмотрим здесь некоторые наиболее употребительные вертикальные координаты.

##### 1.4.1. Изобарическая система координат.

При анализе и прогнозе погоды в настоящее время пользуются картами барической топографии, на которых изображаются высоты изобарических поверхностей. В этом случае

полезно в качестве вертикальной координаты использовать давление  $p$ , а неизвестной переменной считать геопотенциал  $\Phi$ . Горизонтальные координаты  $x$  и  $y$  располагаются в плоскости, касательной к изобарической поверхности  $p = const$ . Такую систему координат называют изобарической, а в зарубежной литературе –  $p$ -системой. В этой системе координат в (1.8) следует положить  $s = p$ . Из (1.13), (1.2) и (1.14) получаем выражение для эффективной вертикальной скорости в изобарической системе:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_h \square \nabla_{hp} \Phi - gw \right). \quad (1.22)$$

В уравнении гидростатики (1.15) параметр  $m = 1$  и оно принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}. \quad (1.23)$$

В правой части уравнения движения (1.16) остается только градиент геопотенциала:

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} + f\vec{k} \times \vec{v}_h = -\nabla_{hp} \Phi + \vec{F}_h. \quad (1.24)$$

В уравнении неразрывности (1.17) пропадает производная по времени и оно принимает бездивергентный вид уравнения несжимаемости

$$\nabla_{hp} \square \vec{v}_h + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0. \quad (1.25)$$

При этом важно помнить, что атмосфера остается сжимаемой. Меняется только форма уравнения несжимаемости в изобарической системе координат. Остальные уравнения (1.4) – (1.6) в изобарической системе координат имеют такой же вид, причем

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_p + \vec{v}_h \square \nabla_{hp} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad (1.26)$$

Верхнее граничное условие типа «твердой крышки» (1.19) записывается в виде

$$\dot{p}_T = 0 \quad \text{при} \quad p = p_T \quad (1.27)$$

Кинематическое условие на нижней границе принимает вид

$$\dot{p}_L = \frac{\partial p_L}{\partial t} + v_{hL} \cdot \nabla_h p_L \quad \text{при} \quad p = p_L = p(x, y, H, t). \quad (1.28)$$

Трудность в применении этого граничного условия связана с изменениями приземного давления в пространстве и времени из-за орографии земной поверхности и метеорологических процессов. Поэтому геопотенциальные высоты изобарических поверхностей меняются во

времени, и для их определения требуется, чтобы на нижней границе была задана тенденция (производная по времени) изменения геопотенциала.

#### 1.4.2. $\theta$ -координата.

При рассмотрении процессов близких к адиабатическим, иногда в качестве вертикальной координаты используется потенциальная температура  $\theta$ , определяемая (1.5). Удобство этой координаты состоит в том, что для адиабатических динамических процессов притоки тепла  $\varepsilon = 0$ . Тогда второе уравнение в (1.4) превращается в  $d\theta/dt = 0$ . Поэтому исчезает эффективная вертикальная скорость

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (1.29)$$

и в уравнениях гидродинамики формально исчезают все члены, содержащие  $\dot{\theta}$ . Уравнения (1.15) – (1.17) в системе координат  $x, y, \theta, t$  принимают при адиабатичности следующий вид:

а) уравнение гидростатики

$$T = \frac{\kappa}{R} \theta \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta}; \quad (1.30)$$

б) уравнение движения

$$\frac{d_\theta \bar{v}_h}{dt} + f \bar{k} \times \bar{v}_h = -\nabla_{h\theta} \Phi_\theta; \quad (1.31)$$

в) уравнение неразрывности

$$\nabla_{h\theta} \square \bar{v}_h + \frac{d_\theta}{dt} \ln \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} \right)^{1/\kappa} \right] = 0. \quad (1.32)$$

В этих уравнениях введены обозначения

$$\Phi_\theta = \frac{RT}{\kappa} + \Phi, \quad \frac{d_\theta}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_\theta + \bar{v}_h \square \nabla_{h\theta}. \quad (1.33)$$

Таким образом, два уравнения (1.31) и (1.32) содержат две переменные  $\bar{v}_h$  и  $\Phi_\theta$ . Температура, плотность и давление определяются из (1.30), (1.5) и (1.6). Граничные условия аналогичны (1.27) и (1.28) и, аналогично изобарической системе координат, осложнены изменчивостью  $\theta$  на земной поверхности.

### 1.4.3. $\sigma$ -координата.

Для упрощения граничных условий на поверхности Земли с учетом орографии Филлипс ввел так называемую систему сигма-координат, в которой в качестве вертикальной координаты используется

$$\sigma = \frac{p - p_T}{p^*}, \quad p^* = p_L - p_T. \quad (1.34)$$

Верхней границе модели отвечает  $\sigma_T = 0$ , а на земной поверхности всегда  $\sigma_L = 1$  и, согласно (1.21), нижнее граничное условие имеет вид

$$\dot{\sigma}_L = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma_L = 1. \quad (1.35)$$

Однако, нижняя координатная плоскость  $\sigma = \sigma_L$  имеет форму рельефа земной поверхности и может быть сильно изрезанной в горных областях (см., например, рис. 4.8 ниже). Поэтому возникают трудности с переходом от  $\sigma$ -координаты к  $z$ -координате. Кроме того, возможны трудности с вычислением горизонтальных градиентов давления (см. ниже).

### 1.5. Преобразованная (нормированная) вертикальная координата.

Аналогично  $\sigma$ -координате, можно ввести преобразованную (или нормированную) обобщенную вертикальную координату, в которой преобразованная переменная  $\tilde{s}$  определяется формулой

$$\tilde{s} = \frac{s - s_L}{s_T - s_L}, \quad (1.36)$$

так что  $\tilde{s} = 0$  на поверхности Земли ( $s = s_L$ ) и  $\tilde{s} = 1$  на верхней границе модели ( $s = s_T$ ). Так как поверхность Земли совпадает с постоянной  $s$  поверхностью, то нижнее граничное условие запишется, аналогично (1.21) и (1.35), в виде

$$\dot{\tilde{s}} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_L. \quad (1.37)$$

Это простое граничное условие является преимуществом использования преобразованной координаты.

Касахара исследовал проинтегрированное по вертикали уравнение полной энергии в  $s$ -системе и нашел, что при использовании  $s = z$  или  $s = p$  обычных граничных условий типа (1.27), (1.28) достаточно, чтобы обеспечить сохранение энергии. В преобразованных

координатах  $\tilde{s} = \tilde{p} = \sigma$  и  $\tilde{s} = \tilde{z}$  нужно использовать нижнее граничное условие (1.37). Однако, если в качестве вертикальной координаты используется не  $z$  или  $p$ , а другая переменная, например, потенциальная температура или плотность, необходимо дополнительное условие на верхней границе, чтобы обеспечить сохранение полной энергии. Могут быть два варианта:

$$\partial p_T / \partial t = 0 \quad \text{при} \quad s = s_T = \text{const}, \quad (1.38)$$

либо

$$z_T = \text{const} \quad \text{при} \quad s = s_T = \text{const}. \quad (1.39)$$

Нельзя использовать оба условия (1.38) и (1.39) одновременно из-за их несовместимости.

Чтобы разработать конкретную численную модель, следует выбрать величину, которая будет использоваться в качестве вертикальной координаты. В моделях крупномасштабной и мезомасштабной динамики атмосферы и океана в качестве вертикальной координаты широко используются давление, преобразованное давление (1.34) и преобразованная высота  $\tilde{z}$ . Другой вертикальной координатой, особенно удобной для описания адиабатических движений, является потенциальная температура  $\theta$ . Для адиабатических движений, согласно (1.4), потенциальная температура сохраняется в частице воздуха. Поэтому набор изэнтропических поверхностей с фиксированными потенциальными температурами отражает вертикальную структуру адиабатических движений. Был разработан ряд численных моделей с такими изэнтропическими координатами.

Неочевидно, какая координатная система является наилучшей для численного моделирования. С точки зрения программирования для ЭВМ выгодно применять преобразованную систему, в которой поверхность Земли становится координатной поверхностью. Однако здесь появляются трудности, связанные с вычислением силы градиента давления. Согласно (1.16), при использовании обобщенной координаты  $s$  сила градиента давления в уравнении движения атмосферы имеет вид

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_{hs} p - \nabla_{hs} \Phi = -RT \nabla_{hs} \ln p - \nabla_{hs} \Phi. \quad (1.40)$$

В регионах с крутыми горами и в областях резких градиентов давления два слагаемых в (1.40) могут оказаться большими по величине и противоположными по знаку. Искомые градиенты давления представляют малые разности этих больших слагаемых. Поэтому могут возникнуть значительные ошибки и требуются специальные приемы разностной

аппроксимации. Без соответствующего численного экспериментирования трудно определить относительные достоинства систем с различными вертикальными координатами.

### 1.6 Обобщенные криволинейные горизонтальные координаты.

В предыдущих разделах рассматривались изменения уравнений гидродинамики при различных выборах вертикальной координаты. В горизонтальной плоскости предполагалась плоская декартова система координат с осями  $x$  и  $y$ , направления которых в динамике атмосферы обычно принимаются на восток и север, соответственно. Такая система горизонтальных координат применима только для описания движений малого масштаба, когда можно пренебречь кривизной земной поверхности. При разработке численных моделей крупномасштабных движений приходится пользоваться криволинейными горизонтальными координатами на сфере. При этом в (1.7) меняется вид операторов  $\nabla_h$  и  $d/dt$ , входящих в уравнения гидродинамики (1.1) – (1.3).

Рассмотрим произвольные криволинейные координаты  $\xi$  и  $\eta$  в горизонтальной плоскости, малые приращения которых связаны с приращениями  $dx$  и  $dy$  соотношениями

$$dx = h_\xi d\xi, \quad dy = h_\eta d\eta, \quad (1.41)$$

где  $h_\xi$  и  $h_\eta$  - метрические коэффициенты, зависящие от выбора системы координат. В такой системе координат элемент расстояния между двумя точками записывается в виде

$$(dl)^2 = h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2, \quad (1.42)$$

а горизонтальные компоненты скорости

$$u = h_\xi d_h \xi / dt, \quad v = h_\eta d_h \eta / dt, \quad (1.43)$$

где полная производная по горизонтальным координатам

$$\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (1.44)$$

В этих криволинейных координатах операторы (1.7) принимают вид

$$\nabla_h = \bar{i}_\xi \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{i}_\eta \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.45)$$

где  $\vec{i}_\xi$  и  $\vec{i}_\eta$  - единичные векторы, направленные по касательным к криволинейным осям координатным осям  $\xi$  и  $\eta$ . Формулы (1.41) – (1.45) применимы для любых криволинейных координат на сфере. Наиболее часто используются сферические координаты с центром, совпадающим с центром Земли. В этой системе в качестве горизонтальных координат используются широта  $\varphi$  и долгота  $\lambda$ , так что в (1.41) – (1.45) следует положить

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda, & \eta &= \varphi, \\ h_\xi &= a \cos \varphi, & h_\eta &= a, \end{aligned} \tag{1.46}$$

где  $a$  – радиус Земли.

### 1.7. Картографические проекции.

Результаты численного моделирования динамических процессов на сферической Земле часто представляются в виде плоских графиков в различных *картографических проекциях*. Невозможно построить плоскую карту сферы, которая сохраняла бы все свойства сферической поверхности. Однако можно сохранить в проекции определенные свойства, такие как площадь, форму (углы между пересекающимися кривыми), масштаб (отношение расстояния на карте к расстоянию на земле) и т.п.

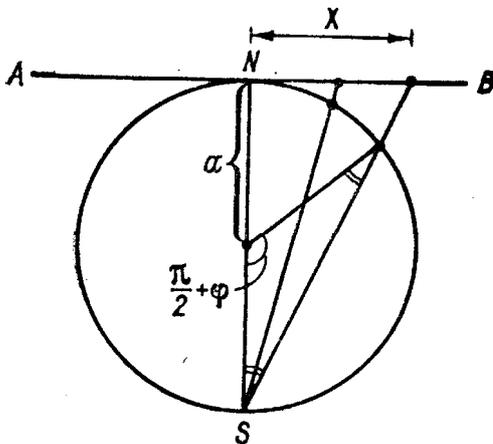


Рис. 1.1. Геометрия полярной стереографической проекции. (Из [3]).

В численном прогнозе и моделировании часто используются *полярная стереографическая* и *меркаторская* проекции. Стереографическая проекция осуществляется на плоскость, касательную к глобусу (см. ANB на рис. 1.1). Точка касания плоскости обычно совпадает с одним из полюсов, однако проектирование можно осуществлять на любую касательную плоскость.

Выделяется класс конформных проекций, в которых сохраняются углы между двумя пересекающимися кривыми. В криволинейных координатах, соответствующих этим проекциям,

метрические коэффициенты не зависят от направления в точке, хотя они могут меняться от точки к точке, т.е.  $h_\xi = h_\eta = h(\xi, \eta)$ .

На стереографической плоскости АВ, проходящей через Северный полюс на рис. 1.1, в качестве горизонтальных прямоугольных координат возьмем  $X$  и  $Y$ , направленные на юг вдоль меридиональных плоскостей с долготами  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \pi/2$ , соответственно. Тогда для записи уравнений гидродинамики в этой системе координат надо в (1.41) – (1.45) положить

$$\begin{aligned} \xi &= X, \quad \eta = Y, \\ h_\xi = h_\eta = h &= \frac{1 + \sin \varphi}{2} = \frac{4a^2}{X^2 + Y^2 + 4a^2}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

При численном прогнозе погоды в уравнениях вместо  $h$  обычно используют масштаб карты

$$M = \frac{1}{h} = \frac{X^2 + Y^2 + 4a^2}{4a^2}. \quad (1.48)$$

Уравнения гидродинамики для координат, связанных с другими картографическими проекциями будут отличаться только метрическими коэффициентами и зависимостью масштаба карты и параметра Кориолиса от координат.

### 1.8. Теория подобия и анализ уравнений

Существуют общие приемы, позволяющие качественно установить, как изменяется соотношение между различными силами, действующими в атмосфере, и между различными членами уравнений гидродинамики при изменении пространственных и временных масштабов движений. Эти приемы основываются на использовании правил, вытекающих из теории подобия.

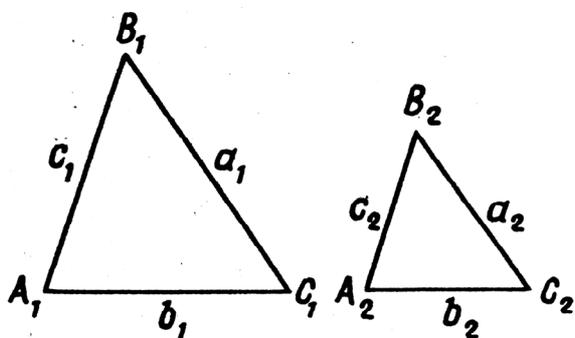


Рис. 1.2. Геометрическое подобие.

Два поля некоторой физической величины называются подобными, если, во-первых, имеет место геометрическое подобие поверхностей, ограничивающих области, в которых заданы поля (см. рис. 1.2). Во-вторых, значения величин в сходных точках подобных полей должны отличаться лишь постоянными коэффициентами.

Подберем подобное движение так, чтобы все его элементы (отмеченные ниже волной сверху) и производные от них были безразмерны и имели порядок единицы, и потребуем пропорциональности между соответствующими элементами исследуемого и подобного движений:

$$\begin{aligned} x &= L\tilde{x}, & y &= L\tilde{y}, & z &= Z\tilde{z}, & t &= T\tilde{t}, & u &= U\tilde{u}, \\ v &= U\tilde{v}, & w &= W\tilde{w}, & \rho &= \Pi\tilde{\rho}, & \Delta p &= \Delta P\tilde{p}, & \nu_z &= K_z\tilde{\nu}_z, & \nu_h &= K_h\tilde{\nu}_h, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где размерные коэффициенты пропорциональности имеют смысл масштабов соответствующих величин:  $L, Z$  – горизонтальной и вертикальной координат,  $T$  – времени,  $U, W$  – горизонтальной и вертикальной скорости,  $\Pi$  – плотности,  $\Delta P$  – изменений давления,  $K_z, K_h$  – вертикальной и горизонтальной турбулентной вязкости. После этого, например, уравнение движения вдоль координаты  $x$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{UW}{Z} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \frac{\Delta P}{\Pi L} \left( \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) + \\ + Uf\tilde{v} + \frac{K_z U}{Z^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{\nu}_z \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) + \frac{K_h U}{L^2} \tilde{\nu}_h \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Поскольку все безразмерные величины в (1.50) имеют порядок единицы, порядок величины каждого слагаемого определяется порядком соответствующих комбинаций размерных коэффициентов. Сравнивая между собой эти коэффициенты, можно судить об относительных величинах самих членов уравнения (1.50). Разделив все члены уравнения (1.50) на коэффициент при втором члене правой части, получаем

$$\begin{aligned} \frac{L}{UT} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{WL}{UZ} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \frac{\Delta P}{\Pi U^2} \left( \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) + \\ + \frac{fL}{U} \tilde{v} + \frac{K_z L}{UZ^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{\nu}_z \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) + \frac{K_h}{UL} \tilde{\nu}_h \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Рассматривая коэффициенты при различных слагаемых в (1.51), можно заключить:

1. Если  $L/UT \ll 1$ , то локальные ускорения не будут играть существенной роли и можно пренебречь первым членом в левой части (1.51). При характерном в тропосфере значении скорости  $U \sim 10$  м/с и горизонтальных масштабах синоптических движений типа циклонов  $L \sim 1000$  км =  $10^6$  м указанное условие выполняется при  $T \gg L/U \sim 1$  сутки. Наоборот, при рассмотрении быстротечных процессов с  $T \ll L/U$  в (1.51) второй

нелинейный адвективный член в левой части пренебрежимо мал по сравнению с первым членом.

2. Если величина  $WL/UZ \ll 1$ , то можно в левой части (1.51) пренебречь третьим слагаемым, содержащим вертикальную скорость.
3. Второй член правой части (1.51), описывающий силу Кориолиса, мал при  $fL/U \ll 1$ . Полагая для средних широт  $f = 2\Omega \sin \varphi \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , получаем  $L \ll U/f \sim 10^5 \text{ м} = 100 \text{ км}$ . Таким образом, если масштаб движения мал, то силой Кориолиса можно пренебречь.
4. Влияние вертикальной турбулентной вязкости (третье слагаемое в правой части (1.51)) мало, если  $K_z L/UZ^2 \ll 1$ , т. е. при  $Z \gg \sqrt{K_z L/U}$ . При типичном в тропосфере значении  $K_z \sim 10 \text{ м}^2/\text{с}$  и приведенных выше значениях  $L$  и  $U$ , получаем  $Z \gg 10^3 \text{ м} = 1 \text{ км}$ . Таким образом, при достаточно больших пространственных масштабах изучаемого явления силами турбулентной вязкости можно пренебречь.

Выводы, сделанные относительно уравнения движения вдоль оси  $x$ , справедливы и для уравнения вдоль оси  $y$ . Так как диапазон изменений скорости в атмосфере сравнительно невелик, а масштаб движения может изменяться в широком диапазоне, используя теорию подобия, можно все виды атмосферных движений разделить на три класса:

- 1) крупномасштабные, в которых локальное ускорение мало по сравнению с силой Кориолиса;
- 2) среднемасштабные, где эти ускорения соизмеримы;
- 3) мелкомасштабные, в которых локальное ускорение велико по сравнению с силой Кориолиса.

Для решения задач синоптической метеорологии и построения краткосрочного и долгосрочного прогнозов погоды наибольшее значение имеют крупномасштабные движения.

## **1.9. Порядки величин метеорологических элементов и их производных.**

Использование теории подобия для анализа уравнений гидродинамики позволяет лишь в общих чертах оценить роль различных факторов в зависимости от масштабов процессов в океане и атмосфере. Более точно и более объективно это можно сделать, если для оценки членов в уравнениях динамики привлечь экспериментальные данные о порядках величин метеоэлементов и их производных. В табл. 1.1 представлены средние климатические значения основных метеорологических элементов в тропосфере, полученные М. И. Юдиным. Для оценки

производных использовались конечные разности значений метеозлементов при горизонтальном шаге 500 км, вертикальном – 2.5 км и временном – 12 ч.

Таблица 1.1. Характерные значения основных метеорологических элементов и их производных в слое атмосферы 0 – 5 км (в системе СИ). (Из [1]).

f	u, v	w	p	T	ρ
f	7	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^{-3}$
$\partial f / \partial s, s=x,y$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-11}$
$\partial f / \partial t$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$
$\partial f / \partial z$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$\partial^2 f / \partial s \partial s$	$3 \cdot 10^{-11}$	-	$1.5 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-17}$
$\partial^2 f / \partial s \partial t$	$3 \cdot 10^{-10}$	-	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-16}$
$\partial^2 f / \partial s \partial z$	$5 \cdot 10^{-9}$	-	$3 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-15}$
$\partial^2 f / \partial t^2$	$5 \cdot 10^{-9}$	-	$2 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-14}$
$\partial^2 f / \partial z \partial t$	$5 \cdot 10^{-8}$	-	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-14}$
$\partial^2 f / \partial z^2$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	-	$1 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-11}$

Пользуясь этой таблицей можно оценивать и сравнивать различные члены уравнений гидродинамики. Для уравнения движения по горизонтальной координате  $x$  имеем оценки

$$\begin{array}{cccc}
 \partial u / \partial t & +u \partial u / \partial x & +v \partial u / \partial y & +w \partial u / \partial z \\
 1.2 \cdot 10^{-4} & 7 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} & 7 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} & 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \\
 1.2 & 0.8 & 0.8 & 0.2 \\
 \\ 
 = -\rho^{-1} \partial p / \partial x & +(2\Omega \sin \varphi)v & +v_z \partial^2 u / \partial z^2 & +v_h (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2). \\
 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-7} & 2 \cdot 7.3 \cdot 10^{-5} \cdot 0.8 \cdot 7 & 10 \cdot 1.2 \cdot 10^{-6} & 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-11} \\
 8 & 8 & 0.12 & 0.003
 \end{array} \quad (1.52)$$

Здесь в нижней строке все члены уравнения умножены на  $10^4$ . Оценка силы Кориолиса выполнена для широты  $\varphi = 55^\circ$ . Сравнение относительных величин различных слагаемых в нижней строке (1.52) показывает, что с точностью 80 – 90 % можно пренебречь вертикальной адвекцией (последнее слагаемое в левой части) и вязкими членами (два последних члена в правой части). В более грубом приближении в (1.52) можно оставить только два первых слагаемых правой части. Тогда получаются уравнения *геострофического ветра*

$$\rho^{-1} \partial p / \partial x - fv = 0, \quad \rho^{-1} \partial p / \partial y + fu = 0. \quad (1.53)$$

Аналогичная оценка членов в уравнении движения по вертикали дает

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial z} + (2\Omega \cos \varphi)u. \quad (1.54)$$

2
1.4
1.4
0.3
 $10^8$ 
 $10^8$ 
 $6 \cdot 10^3$

Видно, что для синоптических движений можно с большой точностью ограничиться двумя первыми слагаемыми правой части, дающими уравнение гидростатики. Оценка членов уравнения неразрывности дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.55)$$

0.03
0.021
0.1
1.2
 $0.3$

Самым грубым приближением является оставление только предпоследнего члена, т. е. приравнение нулю дивергенции горизонтальной скорости. Более точным приближением будет добавление последнего слагаемого левой части.

### 1.10. Фильтрующие свойства приближенных уравнений.

Динамика атмосферы и океана характеризуется наличием различных классов волновых движений (акустико-гравитационные, инерционные, инерционно-гравитационные и т.п.). Исключение членов уравнений гидродинамики при их упрощении может приводить к фильтрации и искажению описания тех или иных типов волн. Так использование приближения несжимаемости (равенство нулю дивергенции скорости) вместо полного уравнения неразрывности ведет к исключению акустических волн. Такой же эффект дает использование уравнения гидростатики или квазигеострофического приближения. Исключение силы Кориолиса приводит к исчезновению инерционных и инерционно-гироскопических волн.

Эти фильтрующие свойства приближенных уравнений необходимо использовать при численном моделировании. В ряде случаев те или иные приближения (например, уравнение гидростатики) специально используют в численных моделях, чтобы отфильтровать нежелательные классы решений (например, акустические волны).

## 2. Физические процессы в прогностических моделях.

Уравнения гидро-термодинамики атмосферы (1.1) и (1.4) содержат удельные притоки импульса  $\vec{F}_h$  и тепла  $\mathcal{E}$  за счет диссипативных и неадиабатических процессов, которые должны рассчитываться в численных моделях динамики атмосферы и океана. Полный приток тепла  $\mathcal{E}$  в (1.4) можно представить в виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_r + \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_c, \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{E}_r$  – полный радиационный приток тепла за счет поглощения солнечной радиации и переноса собственного инфракрасного излучения атмосферы;  $\mathcal{E}_d$  – динамический приток тепла, обусловленный молекулярной и турбулентной диффузией тепла, а также диссипацией энергии движений с масштабами меньшими шага пространственной сетки численной модели;  $\mathcal{E}_c$  – притоки тепла за счет реализации скрытого тепла парообразования и тепла фотохимических реакций в атмосфере и океане. Аналогично, член, описывающий притоки импульса  $\vec{F}_h$  в уравнении движения (1.1) можно записать в виде

$$\vec{F}_h = \vec{F}_L + \vec{F}_S, \quad (2.2)$$

где  $\vec{F}_L$  – скорость изменения количества движения на единицу массы в результате крупномасштабного трения;  $\vec{F}_S$  – вклад движений масштаба меньшего, чем шаг счетной сетки (движений *подсеточного* масштаба).

Для того, чтобы выразить члены, описывающие притоки тепла и импульса, через независимые переменные численной модели, нужно детально знать соответствующие физические процессы. Эти физические процессы изучаются в специальных разделах науки об атмосфере и океане – атмосферной радиации, микрометеорологии, физике облаков и т. д. Часто описание физических процессов с помощью параметров модели называется словом «параметризация».

### 2.1. Солнечная и земная радиация.

Вся энергия атмосферных движений, в конечном счете, образуется благодаря приходящей солнечной радиации, сокращенно называемой *инсоляцией*. Инсоляция на верхней границе

атмосферы составляет приблизительно 8,19 Дж/мин на площадку площадью 1 см<sup>2</sup>, расположенную перпендикулярную солнечному лучу, при среднем расстоянии от Земли до Солнца. Это значение известно как *солнечная постоянная*. Средний поток солнечной энергии, перпендикулярный земной поверхности, составляет около 2,1 Дж/(см<sup>2</sup> мин), так как площадь поверхности в четыре раза больше площади поперечного сечения сферы. Из этого количества энергии около 33 % отражается атмосферой с облаками и частично земной поверхностью. Приблизительно 20 % энергии поглощается атмосферой и 47 % - поверхностью Земли.

Поскольку средняя температура Земли и атмосферы не претерпевает заметных изменений от года к году, энергия, получаемая Землей, должна возвращаться в космическое пространство. Этот окончательный возврат энергии происходит в форме низкотемпературной инфракрасной радиации из системы Земля—атмосфера и называется *земной радиацией*. Слагаемое  $\epsilon_r$  в формуле (2.1), описывающее нагревание или охлаждение за счет радиации, может быть разбито на две части:

$$\epsilon_r = \epsilon_{rs} + \epsilon_{rl}, \quad (2.3)$$

где  $\epsilon_{rs}$  - интенсивность нагревания за счет поглощения инсоляции, а  $\epsilon_{rl}$  - интенсивность нагревания или охлаждения благодаря длинноволновой радиации, излучаемой поверхностью Земли и атмосферой.

Для расчета переноса радиации нужно знать количество поглощающего или излучающего газа в вертикальном столбе с единичным поперечным сечением, расположенном между двумя рассматриваемыми уровнями. Обычно рассматриваются три основных поглощающих газа в атмосфере: водяной пар, углекислый газ и озон. Скорость нагревания вследствие поглощения инсоляции может быть записана в виде

$$\epsilon_{rs} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{rs}(z)}{\partial z}, \quad (2.4)$$

где  $F_{rs}$  - направленный вниз поток солнечной энергии, достигший некоторого высотного уровня  $z$ . Этот поток можно найти, зная поглощающие и рассеивающие свойства атмосферы, а также оптическую толщину. Поток солнечной энергии зависит от солнечной постоянной и от зенитного угла Солнца. Отражение солнечной энергии облаками вычисляется геометрически с учетом распределения облаков по высоте.

Интенсивность нагревания (охлаждения), обусловленного дивергенцией суммарного длинноволнового потока  $\epsilon_{rs}$  в (2.3), можно выразить формулой

$$\epsilon_{r1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} [F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)], \quad (2.5)$$

где  $F^\uparrow$  и  $F^\downarrow$  - суммарные длинноволновые потоки на высоте  $z$ , направленные соответственно вверх и вниз. При ясном небе эти потоки можно вычислить, зная поглощающие свойства атмосферы, содержащей водяной пар, углекислый газ, озон и вертикальное распределение температуры. Поскольку в расчете длинноволновой радиации участвуют оба потока (направленные вверх и вниз), учет влияния облачности на длинноволновую радиацию оказывается более сложным, чем учет влияния облачности на инсоляцию. Влияние облачности обычно учитывают, вычисляя сначала порознь длинноволновые потоки при ясном небе и при полной облачности. В случае частичного покрытия неба облаками средний поток вычисляется путем комбинации потоков в безоблачной ситуации и при сплошной облачности с весовыми коэффициентами, соответствующими доле покрытия неба облаками.

## 2.2. Прогноз облачности и осадков

Облака влияют на атмосферные движения, изменяя распределение нагревания (охлаждения) путем поглощения, отражения и рассеивания солнечной и земной радиации. Облака играют также активную роль, взаимодействуя с атмосферными течениями посредством переноса количества движения, тепла и водяного пара, а также образуя источники и стоки скрытого тепла при фазовых переходах воды. Облака образуются благодаря конденсации, сублимации и замерзанию. Осадки из облаков образуются тогда, когда облачные капли и кристаллы увеличиваются настолько, что не могут более оставаться в состоянии суспензии и выпадают из облаков, при определенных условиях достигая земли в виде дождя, снега или града.

Отношение смеси водяного пара  $q$  определяется по формуле

$$q = \rho_w / \rho, \quad (2.6)$$

где  $\rho_w$  - плотность водяного пара, а  $\rho$  - плотность сухого воздуха. Если отношение смеси  $q$  превышает отношение смеси для состояния насыщения  $q_s$ , то избыток водяного пара по

отношению к  $q$ , обычно конденсируется в виде жидкости или сублимируется в форме льда. При фазовом переходе скрытое тепло конденсации или сублимации освобождается и нагревает воздух. Интенсивность нагревания в результате этого процесса обозначена в (2.1) через  $Q_c$ . Таким образом, первый шаг в расчете  $Q_c$  состоит в предсказании поля влажности. Уравнение переноса водяного пара можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho q \vec{v}_h) + \frac{\partial(\rho q w)}{\partial z} = M + \rho E, \quad (2.7)$$

где  $M$ —скорость конденсации водяного пара в единице объема, а  $E$  – удельная скорость изменения содержания водяного пара за счет вертикальной и горизонтальной диффузии.

Если предположить, что сконденсировавшаяся вода остается в той же частице воздуха в виде облака, то нужно добавить еще два уравнения, описывающие изменения содержания жидкой воды и льда. Для описания фазовых переходов различных форм водной субстанции нужно знать физику облаков. Часть водной субстанции может при случае выпадать из воздуха и поэтому должен быть рассмотрен механизм осадков. С другой стороны, если принять, что вся сконденсированная или сублимированная водная субстанция немедленно выпадает из воздуха, задача значительно упрощается. Расчет тепла конденсации, обсуждаемый в данной книге, обычно основывается на предположении о таком, более простом процессе выпадения осадков. Однако это предположение завышает количество выпавших осадков, поскольку не учитывается тот факт, что во время падения водяные капли испаряются и тем самым количество осадков уменьшается.

### 2.3. Атмосферный пограничный слой

Область от земной поверхности до высоты примерно 1000 м называется *атмосферным пограничным слоем*. Здесь не только происходит диссипация кинетической энергии; этот слой действует и как источник энергии, перенося тепло и водяной пар (скрытую теплоту парообразования) от поверхности Земли в атмосферу.

Область выше атмосферного пограничного слоя называется *свободной атмосферой*. Здесь эффекты трения обычно пренебрежимо малы, за исключением перемежающейся турбулентности, вызванной башнеобразными кучевыми облаками, турбулентностью ясного неба и распространяющимися вверх гравитационными волнами.

Атмосферный пограничный слой может быть подразделен на два горизонтальных слоя. Нижний слой, простирающийся не более, чем на 100 м над поверхностью Земли, называется *приземным пограничным слоем*. Можно принять, что здесь вертикальные потоки количества движения, тепла и водяного пара не зависят от высоты, и структура атмосферы определяется в первую очередь характеристиками поверхности Земли и термической стратификацией. Этот слой называют также слоем *постоянного потока* или *слоем Прандтля*.

Область между приземным пограничным слоем и свободной атмосферой называется *планетарным пограничным слоем*. На его атмосферную структуру влияют сила градиента давления, сила Кориолиса, термическая стратификация и приземные напряжения трения. Он обычно называется *экмановским слоем*, а в последнее время его называют *слоем перемешивания*. Верхняя граница слоя перемешивания обычно хорошо обрисовывается сплошными или разорванными облаками; над ней располагается устойчивая свободная атмосфера, а ниже ее развиты турбулентные движения.

Сила трения  $\vec{F}_L$  в формуле (2.2) может быть представлена в виде

$$\vec{F}_L = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} + \vec{F}_H \quad (2.8)$$

где  $\vec{F}_H$  - составляющая  $\vec{F}_L$ , связанная с горизонтальной диффузией, а  $\vec{\tau}$  - Рейнольдсово напряжение трения, определяемое по формуле

$$\vec{\tau} = -\rho \overline{\vec{v}_h' w'}, \quad (2.9)$$

Здесь штрихи обозначают отклонения величины от скользящего среднего по времени, указанного чертой. Интенсивность нагревания за счет вертикальной и горизонтальной диффузии тепла  $\varepsilon_d$  в (2.1) может быть описана соотношением

$$\varepsilon_d = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \varepsilon_H, \quad (2.10)$$

где  $Q_H$  - вклад горизонтальной вихревой диффузии тепла,  $h$  - вертикальный поток тепла, определяемый по формуле

$$h = c_p \rho \overline{T' w'} \approx c_p \rho \overline{\theta' w'} \quad (2.11)$$

где  $\theta$  - потенциальная температура. Скорость изменения содержания водяного пара в единице массы за счет вихревой диффузии  $E$  в (2.7) имеет вид

$$E = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial r}{\partial z} + E_H, \quad (2.12)$$

где  $E_H$  - горизонтальная составляющая диффузии водяного пара,  $r$  - вертикальный поток водяного пара, определяемый соотношением

$$r = \rho \overline{q'w'}. \quad (2.13)$$

Для того чтобы полностью описать атмосферный пограничный слой, нужно определить вертикальные потоки количества движения  $\tau$ , тепла  $h$  и водяного пара  $r$  в терминах переменных моделируемого течения. Нужно также выбрать формулы для горизонтальных составляющих  $\vec{F}_H$ ,  $\varepsilon_H$  и  $E_H$ . Искусство параметризации заключается в выборе конкретных формул для этих членов.

Вертикальные потоки количества движения  $\tau_s$ , тепла  $h_s$ , водяного пара  $r_s$  в приземном пограничном слое можно определить по следующим эмпирическим формулам:

$$\begin{aligned} \tau_s &= \rho_s C_D V_s \vec{V}_s, \\ h_s &= -\rho_s c_p C_H V_s (\theta_s - \theta_g), \\ r_s &= -\rho_s C_E V_s (q_s - q_g), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где индекс  $s$  относится к величинам в приземном пограничном слое (примерно на высоте 10 м над землей); индекс  $g$  обозначает величины, относящиеся к поверхности земли;  $V_s$  — модуль вектора скорости  $\vec{V}_s$ ,  $C_D$ ,  $C_H$  и  $C_E$  - удельные коэффициенты переноса (или обмена) количества движения, тепла и водяного пара соответственно.

Формулы (2.14) дают возможность связать состояние атмосферы (температуру и удельную влажность) с температурой  $T_g$  и удельной влажностью  $q_g$  подстилающей поверхности и с шероховатостью почвы. Температура подстилающей поверхности  $T_g$  может быть найдена из уравнения теплового баланса, учитывающего все факторы, влияющие на баланс тепла на почве (подстилающей поверхности). Приходящие потоки солнечной и земной радиации уравновешиваются уходящим потоком длинноволновой радиации (излучением подстилающей поверхности как абсолютно черного тела) и переносом тепла и скрытой теплоты в атмосферу и в почву. Аналогично, удельная влажность на подстилающей поверхности может быть вычислена с помощью баланса влаги на земной поверхности. Чтобы решить уравнения баланса тепла и баланса влаги на земной поверхности, нужно знать термические характеристики литосферы, а также гидрологию суши и связанную с ней влажность почвы.

## 2.4. Влияние океанов

Океаны влияют на атмосферу сильнее, чем суша, ибо они покрывают приблизительно 70% поверхности Земли и имеют большую удельную теплоемкость. Как и в случае суши, важной переменной является температура поверхности океана. Для определения температуры поверхности океана можно применять тот же принцип энергетического баланса для поверхности океана, с той лишь разницей, что нужно оперировать с гидросферой вместо литосферы. Необходимо знать океанические циркуляции, чтобы найти перенос тепла вглубь океана и результирующий приток или потерю тепла в результате его переноса океаническими течениями.

В полярных районах морской лед является важным фактором, определяющим обмен теплом, водяным паром и количеством движения между океаном и атмосферой. Льды уменьшают перенос тепла и водяного пара из океана в атмосферу и увеличивают альбедо. Таким образом, подобно снежному покрову на суше, морской лед вызывает охлаждение над поверхностью льда, что, в свою очередь, приводит к увеличению ледяного покрова. В этом смысле существует положительная обратная связь льда с климатом, ибо наличие льда приводит к похолоданию климата и еще больше увеличивает количество льда.

В последние годы были предприняты усилия по объединению моделей океана с атмосферными моделями для исследования циркуляции в атмосфере и океане как единой взаимодействующей системе. Поскольку в объединенной модели атмосфера—океан нет предписанного краевого условия на границе между атмосферой и океаном, устойчивое решение для такой системы если и существует, то не обязательно является единственным.

## 2.5. Параметризация процессов подсеточного масштаба

В любой численной модели атмосферы приходится пользоваться ограниченным разрешением для представления непрерывной среды. Определенные физические и динамические явления, такие, как сильные штормы, кучевая конвекция, гравитационные волны, имеют масштабы меньше, чем вычислительное разрешение, и их нельзя описать в крупномасштабных моделях. Такие движения, не описываемые моделью, называют *процессами подсеточного масштаба*. Соответственно термин «сеточный масштаб» относится к физическим процессам, отвечающим самому мелкому вычислительному разрешению. О влиянии движений подсеточного масштаба на крупномасштабные движения можно судить, во-первых, по энергии подсеточных движений

и, во-вторых, по интенсивности передачи энергии от мелкомасштабных движений к крупномасштабным.

Если допустить, что численная модель обладает экстремально высоким разрешением, то на крайнем участке будет происходить диссипация энергии движений очень мелких масштабов благодаря молекулярной вязкости. Однако на практике наименьший шаг сетки обычно значительно превышает шаг, необходимый для вязкой диссипации. Одна из задач параметризации движений подсеточного масштаба заключается в имитации указанного физического механизма, чтобы обеспечить реалистичный сток энергии.

При краткосрочных прогнозах влияние различных движений подсеточного масштаба сравнительно мало. При долгосрочном прогнозе и воспроизведении климата рассчитанная циркуляция атмосферы оказывается столь же чувствительной к подсеточному вертикальному переносу количества движения и, к подсеточному вертикальному и горизонтальному переносу водяного пара и энергии. Улучшение параметризации подсеточных движений, в том числе внутренних гравитационных волн и ансамблей кучевых облаков, имеет высокий приоритет в численном моделировании.

## **2.6. Влияние условий на верхней границе атмосферы**

Вертикальная протяженность прогностической модели неизбежно ограничена, и возникает вопрос о влиянии верхних граничных условий в модели. Можно предполагать, что простое граничное условие отсутствия потока массы на верхней границе модели (1.19) вызывает искажения волновых мод. Поэтому верхнее граничное условие может породить ошибки в прогнозе погоды и при воспроизведении климата.

Верхнее граничное условие для вынужденных колебаний в простой аналитической модели может быть поставлено с использованием так называемого условия излучения. Однако для свободных колебаний это условие зависит от частоты волновых движений, поэтому его трудно применять в качестве верхнего краевого условия в численных моделях. Поскольку условие излучения, применяемое к невязким адиабатическим движениям, предназначено для воспроизведения поглощения распространяющихся вверх волн в верхней атмосфере, обусловленного молекулярной вязкостью и теплопроводностью, оно может ввести небольшую диссипацию в верхние граничные условия.

Распространяющиеся вверх волны могут также поглощаться на критических уровнях, где средняя горизонтальная скорость равна горизонтальной фазовой скорости и количество

движения передается среднему течению. Таким образом, в реалистической численной модели, в которой средняя горизонтальная скорость зависит от высоты и на достаточно высоких уровнях в атмосфере учитывается влияние вязкости и теплопроводности, выбор верхних граничных условий может быть не столь строгим (за исключением окрестности верхней границы), как в простых невязких атмосферных моделях.

### 3. Методы численного решения уравнений гидродинамики.

Поскольку уравнения динамики атмосферы и океана нелинейны и их решения нелегко, а в большинстве случаев и невозможно получить аналитически, приходится применять численный подход. Численные методы различны в зависимости от типов дифференциальных уравнений. Существуют два основных типа – обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. В первом типе имеется только одна независимая переменная и полные производные по этой переменной. Вторые уравнения имеют несколько независимых переменных и содержат частные производные.

#### 3.1. Основы сеточного метода.

Путь решения уравнений гидро-термодинамики с помощью сеточного метода заключается в нахождении приближенных выражений для производных, содержащихся в уравнениях. Эти приближенные выражения определяются с использованием разностей зависимых переменных на конечных пространственных и временных шагах. По этой причине такой подход называется *конечно-разностным методом*. Рассмотрим основы конечно-разностного метода. Начнем со случая функции одного независимого переменного

$$v = v(x). \quad (3.1)$$

Пусть функция  $v$  является решением интересующего нас дифференциального уравнения. Наиболее простой путь введения системы дискретных точек – разбиение изучаемой области координатной оси  $x$  на целое число интервалов одинаковой длины  $\Delta x$ , называемых *шагом сетки*. Таким образом, берем значения  $v_j = v(x_j)$  в дискретных точках  $x_j = j\Delta x$ , где  $j$  принимает целые значения  $0, 1, 2, \dots, J$ . Знание значений  $v_j$  на дискретной сетке точек содержит меньше информации, чем знание функции  $v(x)$ . Имеющиеся  $J+1$  значения  $v_j$  позволяют вычислить только  $J+1$  коэффициентов разложения функции  $v(x)$  в ряд Фурье:

$$v(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right). \quad (3.2)$$

Поэтому, будет потеряна информация обо всех гармониках Фурье с  $n \geq J/2$ . Из оставшихся гармоник, самой короткой будет волна, соответствующая  $n = J/2$  и имеющая длину  $2\Delta x$ . Таким образом, с помощью значений  $v_j$  в дискретных точках  $x_j = j\Delta x$  невозможно представить волну с длиной меньше, чем  $2\Delta x$ .

Для аппроксимации производных используются разности между величинами  $v_j$ , которые называются *конечными разностями*. Они могут быть *центрированными* или *нецентрированными*. Нецентрированной разностью является, например, так называемая *разность вперед*,  $\delta v_j = v_{j+1} - v_j$ . Более часто используются центрированные (или центральные) разности между значениями, симметричными относительно точек, для которых эти разности вычисляются, например,  $\delta v_j = v_{j+1} - v_{j-1}$ . Конечные разности можно использовать для аппроксимации производных, например,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_j \approx \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Это одна из многих возможных аппроксимаций первой производной в точке  $x=x_j$ . Любая конечно-разностная аппроксимация производной должна быть *согласована*. Это значит, что она должна приближаться к производной при стремлении шага сетки к нулю. Свойства аппроксимации можно проверить, подставляя в нее разложение функции  $v((j+1)\Delta x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_j = j\Delta x$ . Например, для (3.3) это дает

$$\frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_j + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_j \Delta x + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_j (\Delta x)^2 + \dots \quad (3.4)$$

Разность между этим выражением и аппроксимируемой производной  $(dv/dx)_j$ , называется *ошибкой аппроксимации*:

$$\varepsilon = +\frac{1}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_j \Delta x + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_j (\Delta x)^2 + \dots \quad (3.5)$$

Обычной мерой приближения к точному значению является *порядок точности* аппроксимации. Это есть самая низкая степень  $\Delta x$  стоящая в выражении для ошибки аппроксимации. Так, аппроксимация (3.4) является аппроксимацией первого порядка точности, т.к.  $\varepsilon = O(\Delta x)$ . Для того чтобы аппроксимация производной была согласованной, она обязательно должна быть, по крайней мере, первого порядка точности.

### 3.2. Конечно-разностные схемы

Алгебраическое уравнение, полученное путем замены производных в дифференциальных уравнениях соответствующими им конечно-разностными приближениями, называется *конечно-разностной аппроксимацией* этого дифференциального уравнения, или *конечно-разностной схемой*. Для примера рассмотрим линейное уравнение адвекции

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v = v(x, t), \quad (3.6)$$

где  $c$ —положительная константа. Уравнение (3.6) описывает адвекцию переменной  $v$  с постоянной скоростью  $c$  вдоль оси  $x$ . К этому уравнению необходимо начальное условие

$$v(x, 0) = V(x). \quad (3.7)$$

Тогда можно показать, что

$$v = V(x - ct) \quad (3.8)$$

является решением уравнения (3.6), удовлетворяющим начальным условиям (3.7).

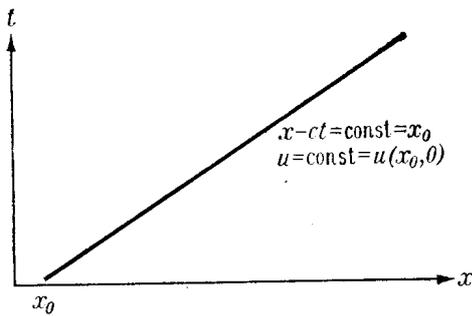


Рис. 3.1. Пример характеристики уравнения (3.7). (Из [2])

В плоскости  $x, t$  это решение принимает постоянные значения вдоль прямых линий  $x - ct = const$ , которые являются характеристиками уравнения адвекции. Одна из них показана на рис. 3.1. Можно сказать, что решение распространяется вдоль этих характеристик.

Построим теперь схему для нахождения приближенного решения уравнения (3.6) с помощью сеточного метода. Аппроксимируя производные их конечно-разностными аналогами типа (3.3), можно получить конечно-разностную схему следующего вида:

$$\frac{v_{n+1,j} - v_{n,j}}{\Delta t} + c \frac{v_{n,j} - v_{n,j-1}}{\Delta x} = 0. \quad (3.9)$$

Если известно точное решение уравнения (3.6), то меру точности аппроксимации можно найти путем подстановки точного решения  $v(j\Delta x, n\Delta t)$  уравнения в численную схему. Поскольку это решение не будет удовлетворять численным уравнениям точно, то появится *ошибка аппроксимации* конечно-разностной схемы. Она показывает, насколько хорошо точное решение удовлетворяет уравнению численной схемы. Для уравнения (3.9) имеем

$$\varepsilon = \frac{v(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - v(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + c \frac{v(j\Delta x, n\Delta t) - v((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x}. \quad (3.10)$$

Аналогично (3.4), используя разложения в ряд Тейлора в окрестности центрального узла сетки, можно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 v}{dt^2} \right)_j \Delta t + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 v}{dt^3} \right)_j (\Delta t)^2 + \dots \\ & + c \left( + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)_j \Delta x + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 v}{dx^3} \right)_j (\Delta x)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

*Порядком точности* конечно-разностной схемы является наименьшая степень  $\Delta t$  или  $\Delta x$ , которая стоит в выражении для ошибки аппроксимации. Таким образом, схема (3.9) является схемой первого порядка точности,  $\varepsilon = O(\Delta x, \Delta t)$ . Важно делать отличие между порядками точности в пространстве и во времени, особенно когда наименьшие степени  $\Delta x$  и  $\Delta t$  не одинаковы. Как отмечалось, необходимым условием для согласованности любой схемы является то, чтобы она была не ниже первого порядка точности.

### 3.3. Сходимость

Ошибка аппроксимации согласованной схемы может быть сделана произвольно малой путем уменьшения шагов сетки  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . К сожалению, это необязательно приведет также к уменьшению ошибки численного решения. Если ошибка  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$  стремится к нулю при  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , то такое решение называют сходящимся. Аналогично если численная схема дает сходящееся решение для любых начальных условий, то она называется сходящейся.

Согласованность схемы не гарантирует еще ее сходимости. Например, рассмотрим схему (3.9). Ее ошибка аппроксимации (3.11) стремится к нулю при уменьшении шагов сетки, т.е. это согласованная схема. Но давайте рассмотрим численное решение, сетка и характеристики которого взяты такими, как это показано на рис. 3.2. Характеристика, пересекающая начало координат, проходит также через точку  $A$ . Тогда согласно (3.8) точное решение в точке  $A$  равно начальному значению в точке начала координат. Однако численное решение в точке  $A$ , согласно (3.9), вычисляется с помощью значений в точках, обозначенных кружками на рис. 1.2. Штриховая линия ограничивает область, которая охватывает все эти точки и называется *областью зависимости* численной схемы. Точка начала координат лежит вне этой области и поэтому не может влиять на численное решение в точке  $A$ . Следовательно, ошибка численного решения может оказаться произвольно большой. Если бы пространственный и временной шаги сетки были уменьшены пропорционально, скажем, на половину своей величины, то область зависимости осталась бы той же самой и ситуация не изменилась бы. Таким образом, пока

отношение шагов  $\Delta x$  и  $\Delta t$  остается неизменным, измельчение сетки не может вызвать уменьшения ошибки численного решения.

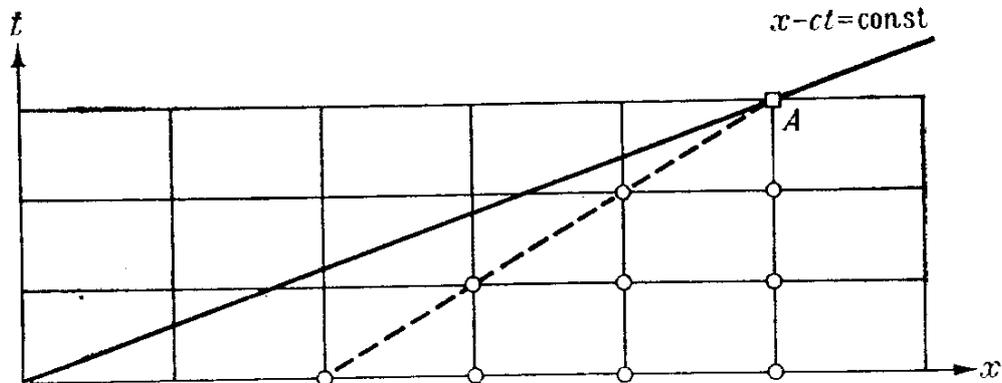


Рис. 3.2. Возможное относительное положение характеристики и области зависимости численного решения. (Из [2])

Необходимое условие сходимости схемы состоит, очевидно, в том, чтобы характеристика, определяющая точное решение в любой точке сетки, находилась бы внутри области зависимости численного решения для этой точки. В нашем примере это произойдет, если наклон характеристик будет больше, чем наклон штриховой линии, ограничивающей область зависимости, т. е. когда

$$c\Delta t \leq \Delta x. \tag{3.12}$$

Это есть необходимое условие для сходимости численной схемы (3.9).

### 3.4. Устойчивость

Точное решение дифференциального уравнения, в общем, не должно быть ограниченным. Однако, во многих случаях бывает известно, что точное решение ограничено. Тогда говорят, что численное решение  $u_j^n$  устойчиво, если ошибка  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$  остается ограниченной с увеличением  $n$  для фиксированных значений  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Конечно-разностная схема называется устойчивой, если она дает устойчивое решение для любых начальных условий.

В принципе, существуют согласованные схемы высокого порядка точности, которые, тем не менее, дают решения, отличия которых от точного решения возрастают недопустимо быстро.

Имеются три основных метода, которые можно использовать для исследования устойчивости схемы. Рассмотрим эти методы на примере схемы (3.9).

### 3.4.1. Прямой метод.

Когда известно, что точное решение ограничено, то достаточно проверить ограниченность численного решения при увеличении числа шагов. Схема (3.9) может быть записана следующим образом:

$$v_{j,n+1} = (1-\eta)v_{j,n} + \eta v_{j-1,n}, \quad \text{где } \eta = c\Delta t / \Delta x. \quad (3.13)$$

При условии  $1 - \eta \geq 0$ , которое совпадает с необходимым условием сходимости (3.12), получим

$$|v_{j,n+1}| \leq (1-\eta)|v_{j,n}| + \eta|v_{j-1,n}|. \quad (3.14)$$

Можно применить это условие в точке, в которой  $|v_{j,n+1}|$  имеет максимум на временном уровне  $n+1$ , а также заменить  $|v_{j,n}|$  и  $|v_{j-1,n}|$  максимальным значением на временном уровне  $n$ . Тогда из (3.14) получается неравенство

$$\max_{(j)} |v_{j,n+1}| \leq \max_{(j)} |v_{j,n}| \quad (3.15)$$

Это неравенство доказывает ограниченность численного решения. Следовательно, оказывается, что условие  $1 - \eta \geq 0$  является достаточным для устойчивости схемы (3.13). Прямой метод проверки устойчивости очень прост. К сожалению, он применим только для довольно ограниченного числа простых численных схем.

### 3.4.2. Энергетический метод.

Этот метод имеет более широкую область применения для линейных и нелинейных уравнений. Если известно, что точное решение ограничено, то можно проверить, ограничена ли также и сумма  $\sum_j v_{j,n}^2$ . Если эта сумма ограничена, то тогда каждое значение  $v_{j,n}$  также должно быть ограничено, что доказывает устойчивость численной схемы. Такой метод называется *энергетическим*, поскольку часто в физических приложениях выражение  $v^2$  пропорционально некоторой форме энергии. Возводя в квадрат выражение (3.13) и суммируя по всем  $j$ , получаем

$$\sum_j v_{j,n+1}^2 = \sum_j [(1-\eta)^2 v_{j,n}^2 + 2\eta(1-\eta)v_{j,n}v_{j-1,n} + \eta^2 v_{j-1,n}^2] \quad (3.16)$$

Предположим, что выполняются *циклические краевые условия*, например,  $v_{j,n} = v_{j+J,n}$ , тогда

$$\sum_j v_{j-1,n}^2 = \sum_j v_{j,n}^2. \quad (3.17)$$

Теперь, используя неравенство Шварца, из (3.17) можно получить

$$\sum_j v_{j,n}v_{j-1,n} \leq \sqrt{\sum_j v_{j,n}^2 \sum_j v_{j-1,n}^2} = \sum_j v_{j,n}^2. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) и (3.18), при  $1 - \eta \geq 0$  получаем неравенство

$$\sum_j v_{j,n+1}^2 \leq [(1-\eta)^2 + 2\eta(1-\eta) + \eta^2] \sum_j v_{j,n}^2, \quad (3.19)$$

откуда имеем

$$\sum_j v_{j,n+1}^2 \leq \sum_j v_{j,n}^2. \quad (3.20)$$

Это доказывает, что условие  $1 - \eta \geq 0$  является достаточным для устойчивости схемы (3.13) при циклических краевых условиях.

### 3.4.3. Метод Неймана

Метод Неймана использует разложения в ряды Фурье и применяется наиболее часто. Его обычно нельзя использовать для проверки устойчивости нелинейных уравнений, поэтому приходится прибегать к анализу их линеаризованных вариантов. Решение линейного уравнения может быть выражено в форме ряда Фурье. Устойчивость всех гармонических составляющих этого ряда является необходимым условием устойчивости численной схемы. Решение уравнения (3.6) в виде одной Фурье-гармоники имеет вид

$$v(x,t) = \text{Re}[V(t)e^{ikx}], \quad (3.21)$$

где  $V(t)$  – комплексная амплитуда волны, а  $k$  – волновое число. Подставляя (3.21) в (3.6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dV}{dt} + ikcV = 0. \quad (3.22)$$

Его решение представляется в виде

$$V(t) = V(0)e^{-ikct}, \quad (3.23)$$

где  $V(0)$  — начальное значение амплитуды. Подставляя (3.23) в (3.21), имеем точное решение уравнения (3.6) в виде  $v(x, t) = \text{Re}[V(0)e^{ik(x-ct)}]$ .

В методе Неймана, будем искать аналогичное решение конечно-разностной аппроксимации (3.9) уравнения (3.6) в виде

$$v_{j,n} = \text{Re}[V_n e^{ikj\Delta x}], \quad (3.24)$$

где  $V_n$  - значение амплитуды на временном уровне  $n$ . Подставляя (3.24) в (3.13), получаем

$$V_{n+1} = (1-\eta)V_n + \eta V_n e^{-ik\Delta x}. \quad (3.25)$$

Согласно (3.25), можно ввести комплексный множитель перехода  $\lambda$ , так что

$$V_{n+1} = \lambda V_n; \quad |V_{n+1}| = |\lambda| |V_n|. \quad (3.26)$$

Для устойчивости гармонического решения (3.26) требуется, чтобы для любого  $n$  было

$$|V_n| = |\lambda|^n |V_0| < C, \quad (3.27)$$

где  $C$  - конечное число. Это неравенство переписывается в виде

$$\ln|\lambda| < C' \Delta t / t = O(\Delta t), \quad (3.28)$$

где  $C' = \ln(C/V_0)$  – новая константа. Полагая  $\lambda = 1 + \delta$  и разлагая левую часть (3.28) в ряд Тейлора при малом  $\Delta t$ , можно получить необходимое условие устойчивости по Нейману в виде

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t). \quad (3.29)$$

Это условие допускает экспоненциальный (но не более быстрый) рост решения. Такое допущение важно для анализа случаев, когда точное решение растет экспоненциально. Если известно, что точное решение не растет, то обычно условие (3.29) заменяется достаточным условием

$$|\lambda| \leq 1. \quad (3.30)$$

Возвращаясь к (3.25), (3.26), имеем

$$\lambda = 1 - \eta + \eta e^{ik\Delta x}. \quad (3.31)$$

Отсюда получаем

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\eta(1-\eta)(1 - \cos k\Delta x). \quad (3.32)$$

Это выражение показывает, что (3.30) выполняется при  $1 - \eta > 0$ , т.е. получаем прежнее условие устойчивости схемы (3.13). Выражения типа (3.32) содержат дополнительную информацию о поведении численного решения. На рис. 3.3 приведены зависимости  $|\lambda|^2$  от  $\eta$  для гармоник с разными длинами волн  $L = 2\pi/k$ . Видно, что все кривые имеют минимумы при  $\eta = 1/2$ .

С увеличением длины волны  $L$ , т. е. когда  $k$  стремится к нулю, множитель перехода приближается к единице для любых значений параметра  $\eta$ . Из рис. 3.3 следует, что в области устойчивости  $|\lambda| < 1$ , т.е. схема дает затухающее решение для всех значений  $\eta < 1$ . Затухание увеличивается по мере уменьшения длины волны. Это затухание вызвано ошибкой, возникающей из-за перехода к конечным разностям.

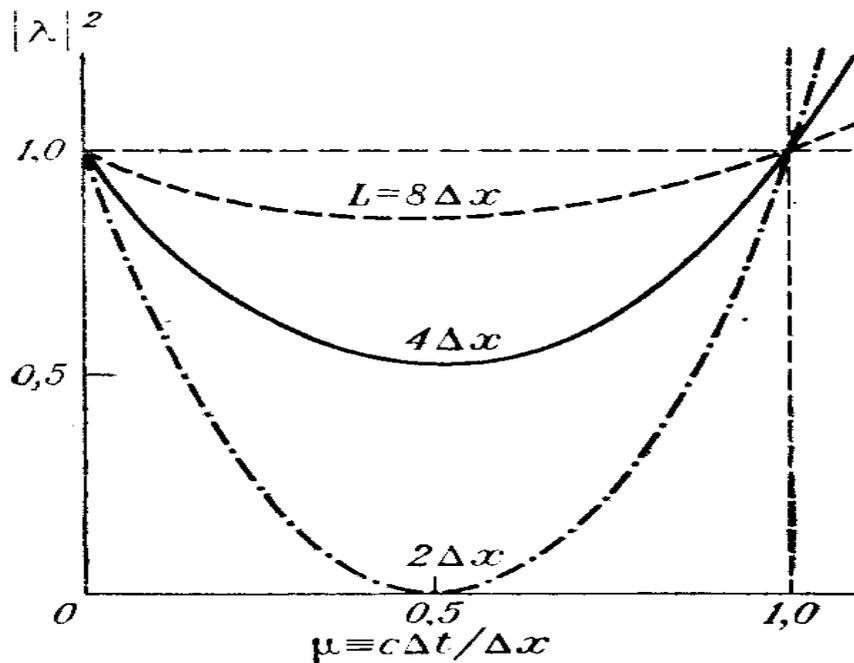


Рис. 3.3. Графики  $|\lambda|^2$  для схемы (3.13) при различных значениях  $L$ . (Из [2])

Для самой короткой допустимой разрешением волны ( $L=2\Delta x$ ) эта ошибка может быть очень большой. Такая волна может даже полностью исчезнуть после одного шага по времени.

### 3.5. Схемы интегрирования по времени

Хотя атмосферные модели являются обычно моделями, в которых решаются сложные системы уравнений в частных производных, но в некоторых постановках численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений составляет важную часть вычислительной процедуры. Для того чтобы дать определение некоторым схемам, рассмотрим уравнение

$$\frac{dV}{dt} = f(V, t); \quad V = V(t). \quad (3.33)$$

Независимая переменная  $t$  называется здесь временем. Разобьем временную ось на отрезки равной длины  $\Delta t$ , Обозначим через  $V_n$  приближенное значение  $V$  в момент  $n\Delta t$ . Пусть мы знаем первые значения  $V_n, V_{n-1}, \dots$  и хотим построить схему для вычисления приближенного значения  $V_{n+1}$ . Для этого имеется много возможностей.

### 3.6. Двухуровневые схемы.

Наиболее просты схемы, которые используют значения зависимых переменных на временных уровнях  $n$  и  $n+1$ . Для того чтобы осуществить интегрирование на первом шаге по времени, если известно единственное начальное условие, можно использовать только двухуровневую схему. Из (3.33) можно получить точное решение

$$V_{n+1} = V_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(V, t) dt. \quad (3.34)$$

#### 3.6.1. Типичные двухуровневые схемы

Сначала рассмотрим несколько схем, которые не используют итерационной процедуры.

1. *Схема Эйлера* (или схема с вперед направленными разностями). Эта схема эквивалентна применению метода прямоугольников при интегрировании в (3.34):

$$V_{n+1} = V_n + f_n \Delta t, \quad f_n = f(V_n, n\Delta t). \quad (3.35)$$

Ошибка аппроксимации этой схемы  $O(\Delta t)$ , т.е. эта схема первого порядка точности. Значение  $f_n$  в (3.35) не центрировано относительно временного интервала  $\Delta t$ , и поэтому говорят, что такая схема *нецентрирована*.

2. *Неявная схема*. Возьмем в (3.34) значение подынтегрального выражения постоянным и равным значению  $f_{n+1}$  в конце  $n$ -го временного шага, тогда получим

$$V_{n+1} = V_n + f_{n+1} \Delta t, \quad f_{n+1} = f[V_{n+1}, (n+1)\Delta t]. \quad (3.36)$$

Если, как в данном случае, величина  $f_{n+1}$  в разностном уравнении зависит от  $V_{n+1}$ , то такая схема называется *неявной*. Для обыкновенного дифференциального уравнения разностный аналог можно просто решить относительно искомой величины  $V_{n+1}$ . Но для уравнений в частных производных может потребоваться решение системы весьма большого числа уравнений, равного числу точек сетки в области интегрирования. Если в разностном уравнении

величина  $f_{n+1}$  не оказывается зависящей от  $V_{n+1}$  то схему называют *явной*. Ошибка аппроксимации схемы (3.36) также равна  $O(\Delta t)$ .

3. *Схема трапеций*. Если аппроксимировать  $f$  в (3.34) как среднее значение величин в начале и конце  $n$ -го временного интервала, то получим схему трапеций

$$V_{n+1} = V_n + (f_n + f_{n+1}) \frac{\Delta t}{2}. \quad (3.37)$$

Это тоже неявная схема. Ее ошибка аппроксимации, однако, равна  $O[(\Delta t)^2]$ .

Для того чтобы увеличить точность (или из-за других причин), можно построить также *итерационные* схемы. Две следующие схемы, приведенные ниже, построены таким же образом, как (3.36) и (3.37), за тем лишь исключением, что, для того чтобы сделать их явными, использована итерационная процедура.

4. *Схема Мауно* (или схема Эйлера с пересчетом). В этой схеме первый шаг делается по обычной схеме Эйлера. Величина  $V_{n+1}^*$ , полученная для временного уровня  $n+1$ , затем используется для определения приближенного значения  $f_{n+1}^*$ . Последнее используется для пересчета  $V_{n+1}$  по схеме (3.36). Вычисления делаются по формулам

$$V_{n+1}^* = V_n + f_n \Delta t, \quad V_{n+1} = V_n + f_{n+1}^* \Delta t, \quad (3.38)$$

где

$$f_{n+1}^* \equiv f(V_{n+1}^*, (n+1)\Delta t) \quad (3.39)$$

Это явная схема первого порядка точности.

5. *Схема Хойна*. Аналогично предыдущей схеме строится аппроксимация с использованием схемы трапеций:

$$\begin{aligned} V_{n+1}^* &= V_n + f_n \Delta t, \\ V_{n+1} &= V_n + \frac{1}{2} [f_n + f_{n+1}^*] \Delta t. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Это также явная схема, но второго порядка точности.

### 3.6.2. Свойства схем на примере уравнения колебаний

Устойчивость и другие важные свойства временных разностных схем, рассмотренных в предыдущем пункте, зависят от формы функции  $f(V, t)$ . В применении к атмосферным моделям

может быть интересен случай  $f=i\sigma V$ , когда уравнение (3.33) принимает вид уравнения колебаний

$$\frac{dV}{dt} = i\sigma V, \quad V = V(t), \quad (3.41)$$

где параметр  $\sigma$  - действительная величина, которая называется частотой. Такое уравнение может быть получено, например, из уравнения адвекции, приведенного к виду (3.22). В этом случае  $\sigma = -kc$ . Общее решение (3.41) для дискретных значений  $t = n\Delta t$  имеет вид

$$V(n\Delta t) = V(0)e^{in\sigma\Delta t}. \quad (3.42)$$

Видим, что аргумент решения меняется на угол  $\sigma\Delta t$  за каждый временной шаг  $\Delta t$ , а амплитуда остается неизменной. Свойства различных конечно-разностных схем в применении к уравнению (3.41) удобно анализировать с помощью метода Неймана, рассматривая множитель перехода  $\lambda$ :

$$V_{n+1} = \lambda V_n. \quad (3.43)$$

Комплексный множитель перехода можно представить в виде

$$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}. \quad (3.44)$$

где  $\theta$  описывает изменение аргумента (или фазы) численного решения на каждом временном шаге. Так как известно, что амплитуда точного решения не изменяется, то для обеспечения устойчивости будем требовать, чтобы  $|\lambda| \leq 1$ . В соответствии с этим, будем говорить, что схема является:

*Неустойчивой* при  $|\lambda| > 1$

*Нейтральной* при  $|\lambda| = 1$

*Диссипативной* при  $|\lambda| < 1$ .

Можно также сравнить изменения фаз численного решения  $\theta$  и точного решения  $\sigma\Delta t$ . Отношение  $\theta/\sigma\Delta t$  показывает *относительное изменение фазы* численного решения. Очевидно, можно сказать, что схема является:

*Ускоряющей* при  $\theta/\sigma\Delta t > 1$

*Не изменяющей фазовую скорость* при  $\theta/\sigma\Delta t = 1$

*Замедляющей* при  $\theta/\sigma\Delta t < 1$

Подставляя (3.44) в (3.36) – (3.39) и вводя новую переменную  $p = \sigma\Delta t$ , можно получить для множителей перехода следующие выражения:

— для схемы Эйлера

$$\lambda = 1 + ip, \quad (3.45)$$

— для неявной схемы

$$\lambda = \frac{1+ip}{1+p^2}, \quad (3.46)$$

— для схемы трапеций

$$\lambda = \frac{1-p^2/4+ip}{1+p^2/4}. \quad (3.47)$$

Для анализа устойчивости схем необходимо определить  $|\lambda|$ . Из (3.45) получаем для **схемы Эйлера**

$$|\lambda| = \sqrt{1+p^2}. \quad (3.48)$$

Поскольку  $|\lambda| > 1$  при всех значениях  $p$ , схема Эйлера всегда неустойчива. Разлагая (3.48) в ряд Тейлора при малом  $p$ , получаем

$$|\lambda| = 1 + \frac{1}{2}p^2 + \dots \quad (3.49)$$

Это выражение показывает, что  $|\lambda| = 1 + O(\Delta t^2)$ , т.е. на один порядок малости по  $\Delta t$  меньше, чем требует необходимое условие устойчивости по Нейману (3.30). Однако, неосторожное использование схемы Эйлера для решения атмосферных уравнений может приводить к неприемлемо быстрому росту решения.

Для **неявной схемы** получим

$$|\lambda| = 1/\sqrt{1+p^2}. \quad (3.50)$$

Видно, что  $|\lambda| \leq 1$  при любых значениях  $p$ . Таким образом, неявная схема *безусловно устойчива*. Кроме того, это диссипативная схема, в которой  $|\lambda|$  уменьшается с ростом  $p$  и частоты  $\sigma$ . Такое свойство схемы иногда является желательным. Например, схема с диссипативными свойствами, зависящими от частоты, может быть использована для отфильтровывания нежелательных высокочастотных движений.

Для **схемы трапеций** имеем

$$|\lambda| = 1. \quad (3.51)$$

Таким образом, эта схема всегда нейтральна. Амплитуда численного решения остается постоянной, точно так же, как и для точного решения. Как указывалось выше, схема трапеций является неявной, как и предыдущая схема. Важно отметить, что обе рассмотренные неявные схемы устойчивы независимо от величины выбранного шага  $\Delta t$ .

*Итерационные* двухуровневые схемы (3.38) – (3.40) схемы можно также проанализировать методом Неймана, подставляя в них (3.26). В результате, можно получить выражения для множителей перехода.

Для **схемы Мацуно**

$$\lambda = 1 - p^2 + ip. \quad (3.52)$$

Для анализа устойчивости найдем  $|\lambda|$ :

$$|\lambda| = (1 - p^2 + p^4)^{1/2}. \quad (3.53)$$

Модуль  $|\lambda| \leq 1$  при  $|p| \leq 1$ . Значит, для обеспечения устойчивости, надо выбрать шаг  $\Delta t$  достаточно малым, так, чтобы

$$\Delta t \leq 1/|\sigma|. \quad (3.54)$$

Следовательно, схема Мацуно является условно устойчивой. Чем больше частота  $\sigma$ , тем большее ограничение на  $\Delta t$  накладывает условие устойчивости. Множитель перехода для схемы Мацуно имеет минимум при  $p = 1/\sqrt{2}$ . Поэтому, можно выбрать временной шаг таким образом, чтобы выполнялось условие  $0 < p < 1/\sqrt{2}$  для всех анализируемых частот. Тогда эта схема будет подавлять относительную амплитуду высокочастотных колебаний таким же образом, как неявная схема (3.36). Схема Мацуно часто используется для начального согласования полей (инициализации) в атмосферных моделях, где она применяется для подавления быстрорастущих высокочастотных шумов, генерируемых в процессе усвоения данных наблюдений.

Для **схемы Хойна** множитель перехода записывается в виде

$$\lambda = 1 - p^2/2 + ip. \quad (3.55)$$

Отсюда

$$|\lambda| = \sqrt{1 + p^4/4}. \quad (3.56)$$

Эта величина всегда больше единицы. Поэтому схема Хойна всегда неустойчива, подобно схеме Эйлера. Однако вместо (3.49) для малых значений  $p$  из (3.56) получается

$$|\lambda| = 1 + p^4/8 + \dots, \quad (3.57)$$

т. е.  $|\lambda| - 1 = O[(\Delta t)^4]$ . Такая неустойчивость является достаточно слабой. Она может быть допустимой, если мы можем выбрать достаточно малое значение  $\Delta t$ . Рис. 3.4 обобщает результаты, полученные для рассмотренных пяти схем. Поскольку для всех этих схем множитель перехода является четной функцией от  $p$ , то кривая  $|\lambda|$  показана только для  $p > 0$ .

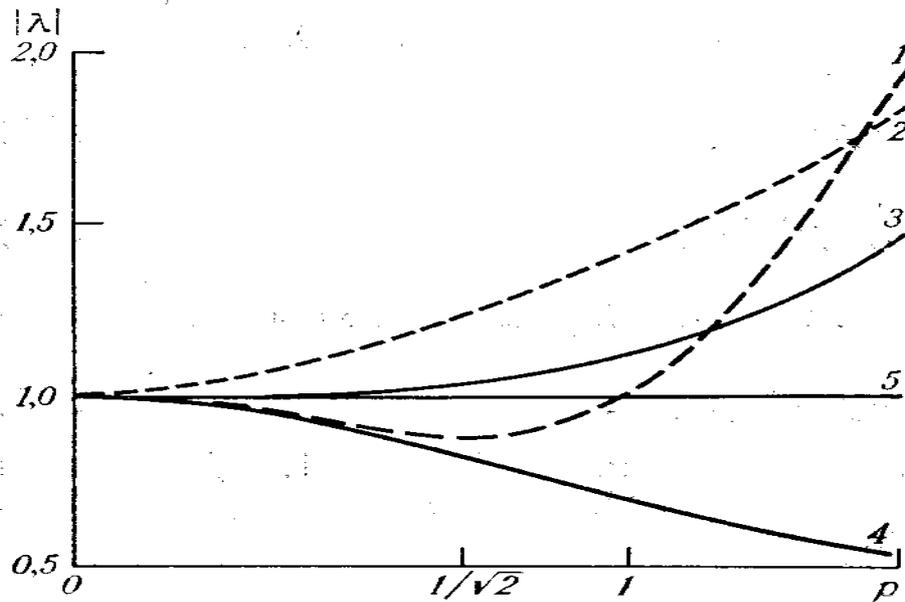


Рис. 3.4. Зависимость модуля множителя перехода от  $p = \sigma\Delta t$  для пяти двухуровневых схем и точного решения. 1-схема Мацуно, 2 - схема Эйлера, 3- схема Хойна, 4- неявная схема, 5-схема трапеций и точное решение. (Из [2]).

Теперь рассмотрим фазовые характеристики конечно-разностных схем, относительные изменение фазы  $\theta/p$  по времени. Используя (3.44) и учитывая комплексность  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_i, \quad (3.58)$$

имеем

$$\theta = \arctg \frac{\lambda_i}{\lambda_r}, \quad \frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctg \frac{\lambda_i}{\lambda_r}. \quad (3.59)$$

Для **схемы Эйлера** и **неявной схемы**, пользуясь (3.45) и (3.46), соответственно, получаем

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctg(p). \quad (3.60)$$

Поскольку правая часть всегда меньше единицы, можно заключить, что обе эти схемы дают замедление фазовой скорости перемещения волн. Для  $p = 1$  имеем  $\theta/p = \pi/4$ .

Для **схемы Мацуно** из выражения (3.52) получим

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctg \frac{p}{1-p^2}. \quad (3.61)$$

Здесь не очевидно, будет ли правая часть больше или меньше единицы. Однако для практически важных малых  $p$  получается разложение в ряд вида

$$\frac{\theta}{p} = 1 + \frac{2}{3}p^2 + \dots \quad (3.62)$$

Поскольку  $\theta/p > 1$ , схема Мацуно приводит к ускорению движения. Для  $p = 1$  это можно заключить непосредственно из (3.61), поскольку в данном случае  $\theta/p = \pi/2$ .

### 3.6.3. Свойства схем в приложении к уравнению трения

Теперь рассмотрим свойства двухуровневных схем в применении к уравнению

$$\frac{dV}{dt} = -kV, \quad V = V(t), \quad k > 0, \quad (3.63)$$

которое можно назвать *уравнением трения*. Например, такое уравнение можно получить из уравнения переноса тепла, вязкого трения, или диффузии примеси, имеющего вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \mu > 0. \quad (3.64)$$

Если искать его решение в форме одной гармонической компоненты  $v(x, t) = \text{Re}[V(t)e^{imx}]$ , получим уравнение

$$\frac{dV}{dt} = -\mu m V, \quad (3.65)$$

которое эквивалентно (3.63), если обозначить  $k = \mu m$ . Общим решением (3.63) является

$$V(t) = V(0)e^{-kt}. \quad (3.66)$$

Это значит, что обе части решения (действительная и мнимая) уменьшаются экспоненциально с ростом времени. Свойства конечно-разностных схем, применяемых к уравнению (3.63), снова проанализируем с помощью метода Неймана. Для уравнения (3.63) в (3.34) – (3.40) необходимо положить  $f(V, t) = -kV$ . Учитывая, затем, (3.43), можно получить следующие множители перехода:

**Для схемы Эйлера**

$$\lambda = 1 - K; \quad (3.67)$$

Эта схема устойчива, если  $|1-K| \leq 1$ , т.е. когда  $0 < K \leq 2$ . Однако, для исключения знакопеременных колебаний решения от шага к шагу требуется  $K < 1$ .

**Для неявной схемы**

$$\lambda = \frac{1}{1+K}. \quad (3.68)$$

Эта схема всегда устойчива при  $K > 0$ , и решение не изменяет знака от шага к шагу.

Для схемы трапеций

$$\lambda = \frac{1 - K/2}{1 + K/2}. \quad (3.69)$$

Схема всегда устойчива при  $K > 0$ . Решение не осциллирует, если  $K < 2$ . Используя (3.38) – (3.40), можно получить множители перехода для итеративных двухуровневых конечно-разностных схем.

Для схемы Мацуно

$$\lambda = 1 - K + K^2. \quad (3.70)$$

Для схемы Хойна

$$\lambda = 1 - K + K^2/2. \quad (3.71)$$

Обе схемы устойчивы при достаточно малых значениях  $K$ .

### 3.7. Трехуровневые схемы.

За исключением первого шага сетки по времени, можно сохранять значение  $V_{n-1}$  и строить трехуровневые схемы, обладающие преимуществами из-за использования этой дополнительной информации. Они дают решение уравнения (3.33) в виде

$$V_{n+1} = V_{n-1} + \int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(V, t) dt, \quad (3.72)$$

который использует дополнительное значение  $V_{n-1}$  для построения более точного приближения к (3.33).

#### 3.7.1. Типичные трехуровневые схемы

1. *Схема центральных разностей (ЦР)*. Самый простой способ получить центрированную оценку интеграла в (3.72) заключается в том, что в качестве  $f$  принимается постоянная величина, равная его значению в средней точке интервала  $2\Delta t$ . Это дает схему центральных разностей

$$V_{n+1} = V_{n-1} + 2f_n \Delta t. \quad (3.73)$$

Ее ошибка аппроксимации порядка  $O[(\Delta t)^2]$ . В настоящее время эта схема широко используется в атмосферных моделях.

2. *Схема Адамса—Бэшфорта.* Схема, которая обычно называется схемой Адамса—Бэшфорта в атмосферных задачах, в действительности является упрощенным вариантом более точной схемы Адамса—Бэшфорта четвертого порядка точности. Согласно этой схеме

$$V_{n+1} = V_n + (3f_n / 2 - f_{n-1} / 2)\Delta t. \quad (3.74)$$

Эта схема имеет второй порядок точности. Есть много других вариантов для построения трехуровневных схем. Например, интеграл в (3.73) можно вычислять по правилу Симпсона, т. е. строя параболу по значениям  $f_{n+1}$ ,  $f_n$ ,  $f_{n-1}$ . Неявная схема, полученная таким путем, называется схемой Милна-Симпсона.

### 3.7.2. Трехуровневные схемы и вычислительные моды.

Рассмотрим схему центральных разностей (3.73) в применении к уравнению колебаний (3.41). Она приводит к соотношению

$$V_{n+1} = V_{n-1} + 2i\sigma V_n \Delta t. \quad (3.75)$$

В соответствии с (3.43) можно написать

$$V_n = \lambda V_{n-1}; \quad V_{n+1} = \lambda V_n. \quad (3.76)$$

Если эти соотношения подставить в (3.75), получим квадратное уравнение для  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0, \quad (3.77)$$

где, как и прежде,  $p = \sigma\Delta t$ . Это уравнение имеет два решения

$$\lambda_1 = \sqrt{1-p^2} + ip, \quad \lambda_2 = -\sqrt{1-p^2} + ip. \quad (3.78)$$

Таким образом, имеется два решения вида  $V_{n+1} = \lambda V_n$ . В общем случае  $m$ -уровневая схема будет давать  $m - 1$  решение вида  $V_{n+1} = \lambda V_n$ . Каждое из этих решений, соответствующих одному из значений  $\lambda$ , называется модой. В (3.78) имеем  $\lambda_1 \rightarrow 1$  при  $p \rightarrow 0$ . Это означает, что соответствующее решение вида  $V_{n+1} = \lambda V_n$  дает приближение к точному решению при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Подобные решения, связанные с  $\lambda_1$ , обычно называются *физическими модами*, соответствующими физическим процессам. Аналогично, из (3.78) видим, что  $\lambda_2 \rightarrow -1$  при  $p \rightarrow 0$ . Поэтому, решения, связанные с  $\lambda_2$ , не являются приближениями к точному решению и называются *вычислительными модами*.

Поскольку уравнение (3.41) линейно, его решение можно представить в виде линейной комбинации двух решений (мод), соответствующих  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$V_n^{(1)} = \lambda_1^n V_0^{(1)}; \quad V_n^{(2)} = \lambda_2^n V_0^{(2)}, \quad (3.79)$$

т.е., можно записать

$$V_n = \alpha \lambda_1^n V_0^{(1)} + \beta \lambda_2^n V_0^{(2)}. \quad (3.80)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — константы. Это решение должно удовлетворять начальным условиям: физическому при  $n = 0$  и вычислительному при  $n = 1$ , которое определяется, например, по какой-нибудь двухуровневой схеме. Из (3.80) имеем

$$V_0 = \alpha V_0^{(1)} + \beta V_0^{(2)}, \quad V_1 = \alpha \lambda_1 V_0^{(1)} + \beta \lambda_2 V_0^{(2)}. \quad (3.81)$$

Разрешая эти уравнения относительно  $\alpha V_0^{(1)}$  и  $\beta V_0^{(2)}$  и подставляя результат в (3.80), получаем

$$V_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [\lambda_1^n (V_1 - \lambda_2 V_0) - \lambda_2^n (V_1 - \lambda_1 V_0)]. \quad (3.82)$$

Следовательно, амплитуды физической и вычислительной мод пропорциональны  $|V_1 - \lambda_2 V_0|$  и  $|V_1 - \lambda_1 V_0|$ , соответственно. Поэтому, обе моды зависят от  $V_1$ . Если, например, можно было бы выбрать  $V_1 = \lambda_1 V_0$ , то численное решение содержало бы только физическую моду. С другой стороны, если выбор  $V_1$  сделан так неудачно, что  $V_1 = \lambda_2 V_0$ , то решение будет содержать исключительно вычислительную моду.

Численные методы обычно используются для решения уравнений, которые не могут быть решены аналитическими методами. В этих случаях мы не будем знать точные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Поэтому  $V_1$  обычно вычисляется по заданному начальному значению  $V_0$  с помощью одной из двухуровневых конечно-разностных схем, например, схем Эйлера или Хойна. Кроме того, даже если бы было известно точное значение  $V_1$ , это еще не позволило бы исключить вычислительную моду из практических численных расчетов из-за ошибок округления при расчетах на ЭВМ. При наличии ошибок округления вычислительная мода будет появляться в процессе интегрирования, даже если она отсутствует в начальный момент.

### 3.7.3. Устойчивость схемы центральных разностей

Поскольку невозможно полностью исключить вычислительную моду, необходимо потребовать, чтобы ни один из двух множителей перехода в (3.78) не был больше единицы. Рассмотрим три частных случая.

1. **Малые  $|p| < 1$ .** Из (3.78) имеем

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1. \quad (3.83)$$

Таким образом, в этом случае обе моды устойчивы и нейтральны. Выражение для изменения фазы получим, используя (3.59) и (3.78):

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right), \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \left( -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right). \quad (3.84)$$

Для малых  $p$  из первого выражения (3.84) получим разложение в ряд Тейлора

$$\theta_1 / p = 1 + p^2 / 6 + \dots \quad (3.85)$$

Таким образом, схема центральных разностей приводит к ускорению волн, которое в 4 раза меньше, чем для схемы Мацуно.

**2. Средние  $|p| = 1$ .** Из (3.78) видим, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = ip$ , поэтому

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1. \quad (3.86)$$

Таким образом, обе моды нейтральны. Для  $p = \pm 1$  получим

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.87)$$

В комплексной плоскости физическая и вычислительная моды поворачиваются на каждом временном шаге на угол  $\pm \pi/2$ , в то время как точное решение изменяется только на угол  $\pm 1$ . Поэтому ошибка фазы в данном случае велика.

**3. Большие  $|p| > 1$ .** Из (3.78) получаем

$$|\lambda_1| = |p + \sqrt{p^2 - 1}|, \quad |\lambda_2| = |p - \sqrt{p^2 - 1}|. \quad (3.88)$$

Видно, что при  $p > 1$  имеем  $|\lambda_1| > 1$ , а при  $p < -1$  имеем  $|\lambda_2| > 1$ . Значит, при  $|p| > 1$  схема центральных разностей неустойчива. Изменение фазы описывается выражением таким же, как и для случая  $|p|=1$ .

Подводя итог, заметим, что достоинством схемы центральных разностей является ее простота, второй порядок точности и нейтральность в пределах области устойчивости  $|\sigma \Delta t| \leq 1$ . Недостатком этой схемы является наличие нейтральной вычислительной моды. У нелинейных уравнений имеется тенденция к медленному росту вычислительной моды. Для подавления этой неустойчивости обычно используется метод, заключающийся в периодическом включении двухуровневой схемы, которая исключает вычислительную моду. Любая многоуровневая схема, которая подавляет вычислительную моду, также может быть использована для этой цели.

### 3.7.4. Устойчивость и другие свойства схемы Адамса—Бэшфорта

Рассмотрим схему (3.74). В применении к уравнению колебаний (3.41) эта схема приводит к соотношению

$$V_{n+1} = V_n + i\sigma(3V_n/2 - V_{n-1}/2)\Delta t. \quad (3.89)$$

Подставляя выражения (3.76), получим квадратное уравнение для множителя перехода  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - (1 + i3p/2)\lambda + ip/2 = 0. \quad (3.90)$$

Это уравнение имеет решения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 + i3p/2 + \sqrt{1 - 9p^2/4 + ip})/2, \\ \lambda_2 &= (1 + i3p/2 - \sqrt{1 - 9p^2/4 + ip})/2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Отсюда видим, что  $p \rightarrow 0$  множитель  $\lambda_1 \rightarrow 1$ , в то время как  $\lambda_2 \rightarrow 0$ . Таким образом, решение, связанное с  $\lambda_1$  снова представляет физическую моду, а решение, связанное с  $\lambda_2$  – вычислительную моду. Однако в то время как для схемы центральных разностей вычислительная мода оказалась нейтральной, здесь  $|\lambda_2| < 1$  и она подавляется. Это является очень полезным свойством схемы Адамса-Бэшфорта. Разложение (3.91) в ряды при малых значениях  $p$  приводит к выражениям

$$|\lambda_1| = 1 + p^4/4 + \dots, \quad |\lambda_2| = p/2 + \dots \quad (3.92)$$

Выражения (3.91) и/или (3.92) показывают, что физическая мода схемы Адамса—Бэшфорта всегда неустойчива. Однако, как и для схемы Хойна, увеличение амплитуды определяется только членом с четвертой степенью, и оно может быть допустимым при выборе достаточно малого значения  $\Delta t$ . Таким образом, схема Адамса—Бэшфорта, в которой правая часть вычисляется только один раз на каждом шаге, может рассматриваться как гораздо более экономичная, чем схема Хойна. Она довольно часто используется в метеорологических численных исследованиях.

### 3.7.5. Свойства трехуровневых схем применительно к уравнению трения

Рассмотрим теперь уравнение (3.63).

**Схема центральных разностей** дает

$$V_{n+1} = V_{n-1} - 2kV_n\Delta t. \quad (3.93)$$

Для множителя перехода получается уравнение

$$\lambda^2 + 2K\lambda - 1 = 0, \quad (3.94)$$

где  $K=k\Delta t$ . Это уравнение имеет решения:

$$\lambda_1 = -K + \sqrt{1+K^2}, \quad \lambda_2 = -K - \sqrt{1+K^2}. \quad (3.95)$$

Когда  $K \rightarrow 0$ , то  $\lambda_1 \rightarrow 1$ , а  $\lambda_2 \rightarrow -1$ . Следовательно, решение, связанное с  $\lambda_1$ , представляет физическую моду, а с  $\lambda_2$  - вычислительную моду. Для  $K > 0$  имеем  $\lambda_2 < -1$ . Значит, вычислительная мода всегда неустойчива. Она изменяет знак от шага к шагу и ее амплитуда растет. Рост вычислительной моды не мал, поэтому схема ЦР не пригодна для численного интегрирования уравнения трения.

Для **схемы Адамса—Бэшфорта** можно получить

$$\lambda = (1 - 3K/2 \pm \sqrt{1 - K + 9K^2/4})/2. \quad (3.96)$$

Отсюда следует, что эта схема устойчива для достаточно малых значений  $K$ , а вычислительная мода подавляется.

### 3.8. Комбинация схем

Естественно теперь задать вопрос, что нужно делать, если уравнение содержит как осцилляционный, так и фрикционный члены., как, например, в уравнении

$$\frac{\partial V}{\partial t} = i\sigma V - kV. \quad (3.97)$$

Здесь можно было бы использовать схему центральных разностей, поскольку присутствует осцилляционный член  $i\sigma V$ , но мы знаем, что ее нельзя использовать для фрикционного члена  $-kV$ . В этой и аналогичных ситуациях можно использовать различные схемы для разностного описания этих членов. Например, если использовать схему центральных разностей для осцилляционного и схему Эйлера для фрикционного членов, то получим

$$V_{n+1} = V_{n-1} + 2(i\sigma V_n - kV_{n-1})\Delta t. \quad (3.98)$$

Возможны также и другие комбинации.

### 3.9. Вычислительная дисперсия

Как уже упоминалось в п. 3.4.3, линейное уравнение адвекции

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad c = const \quad (3.99)$$

имеет решение в форме одной гармонике

$$v(x, t) = \text{Re}[V(0)e^{ik(x-ct)}]. \quad (3.100)$$

при условии, что

$$\frac{dV}{dt} + ikcV = 0. \quad (3.101)$$

В этом уравнении колебаний произведение  $kc$  равно частоте, так что  $c$  является фазовой скоростью волн. Мы видим, что волны всех длин распространяются с одинаковой скоростью, другими словами, функция  $v(x, t)$  переносится без изменения формы с постоянной скоростью  $c$  вдоль оси  $x$ . Здесь нет никакой дисперсии.

### 3.9.1. Схема с центральными пространственными разностями

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + c \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2\Delta x} = 0, \quad (3.102)$$

которое получено путем аппроксимации пространственной в (3.99) производной центральной разностью. Уравнение такого типа может быть названо *дифференциально-разностным*, или *полудискретным* уравнением. Так как производная по времени остается в дифференциальной форме, то все ошибки в (3.102) обусловлены пространственными разностями. Подставляя (3.21) в (3.102), получаем

$$\frac{dV}{dt} + ik\left(c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)V = 0. \quad (3.103)$$

Сравнивая (3.103) и (3.101), видим, что вместо постоянной фазовой скорости  $c$  волны теперь распространяются с фазовой скоростью

$$c^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}, \quad (3.104)$$

которая зависит от волнового числа  $k$ . Следовательно, пространственное конечно-разностное представление порождает эффект *вычислительной дисперсии* волн. По мере роста  $k\Delta x$  фазовая скорость  $c^*$  монотонно уменьшается от  $c$  до нуля для самой короткой допустимой разрешением волны с длиной  $2\Delta x$ , соответствующей  $k\Delta x = \pi$ . Таким образом, все волны распространяются со скоростью, меньшей, чем точная фазовая скорость  $c$ . Следствием этой ошибки является общее замедление адвективного процесса. Кроме того, скорость адвекции изменяется в зависимости от волнового числа. Если переносится система, которая представляет собой суперпозицию волн, то паразитарная дисперсия будет вызывать деформацию этой системы. Это относится в первую

очередь к мелкомасштабным неоднородностям, таким, как фронты, линии скачков ветра и т. п., которые представляют суперпозицию многих волн, включая существенное количество самых коротких волн. По этой причине при численном прогнозировании такие неоднородности, если они присутствуют в начальных полях, начинают очень быстро деформироваться до тех пор, пока они не примут менее резкую форму, чем вначале.

Рассмотрим теперь групповую скорость. В случае уравнения (3.101) групповая скорость:

$$c_g = \frac{d(kc)}{dk} = c. \quad (3.105)$$

Следовательно, групповая скорость постоянна и равна фазовой скорости  $c$ . Однако для дифференциально-разностного уравнения (3.103) получим групповую скорость

$$c_g^* = \frac{d(kc^*)}{dk} = c \cos k\Delta x. \quad (3.106)$$

Видно, что по мере возрастания  $k\Delta x$  групповая скорость  $c_g^*$  монотонно уменьшается от  $c_g$  при  $k\Delta x = 0$  до  $-c_g^*$  при  $k\Delta x = \pi$ , т. е. для самой короткой волны длиной  $2\Delta x$ . Эти результаты представлены на рис. 3.5. Он показывает, что использование в (3.99) центральных пространственных разностей приводит к уменьшению фазовой и групповой скоростей с увеличением волнового числа. Эта ошибка оказывается особенно большой для самых коротких допустимых разрешением волн. Волны с длиной меньше, чем  $4\Delta x$ , имеют даже отрицательную групповую скорость при положительной фазовой скорости.

Рис. 3.6 иллюстрирует результаты временной эволюции узкого первоначального импульса, изображенного на верхнем графике. Скорость адвекции  $c$  направлена в положительную сторону оси  $x$ . Видно, что главный импульс переносится в окрестности точек  $j = 5$  и  $10$  в моменты времени  $\tau = 5$  и  $10$  соответственно. Скорость этого перемещения несколько меньше физической скорости  $c$ . Полуширины этих импульсов увеличиваются с ростом времени.

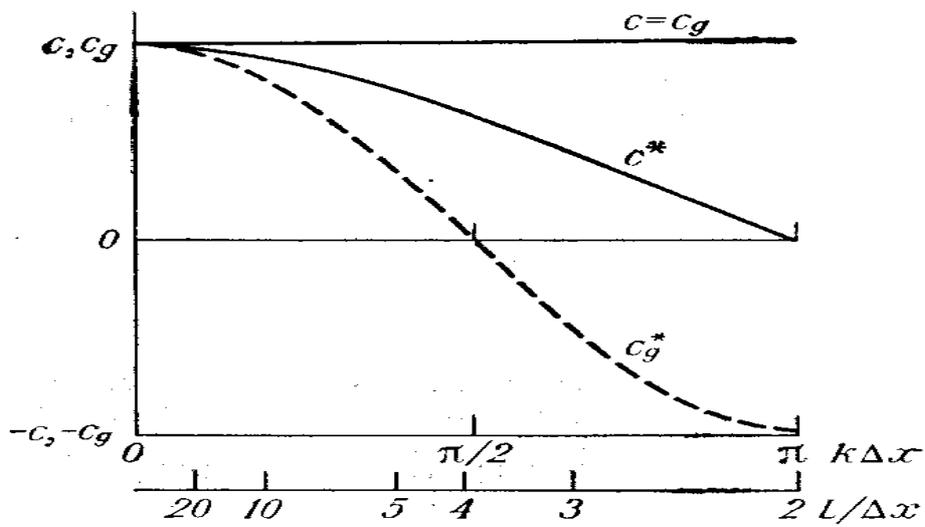


Рис. 3.5. Зависимость фазовой и групповой скоростей от  $k$  и  $\Delta x$  для уравнения переноса (3.99) (горизонтальная линия) и для дифференциально-разностного уравнения (3.102) (сплошная кривая и пунктир). (Из [2]).

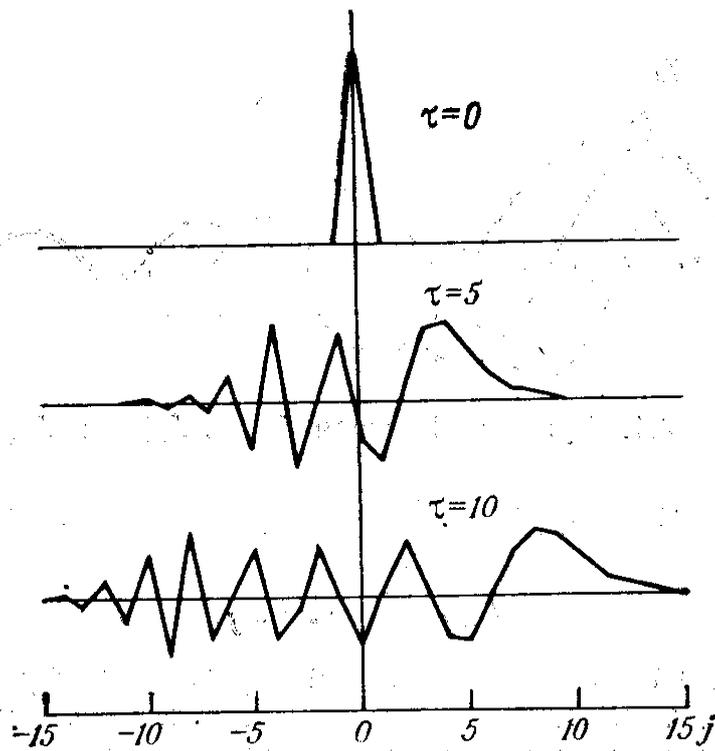


Рис. 3.6. Аналитическое решение уравнения (3.102) при начальном условии, показанном на верхнем графике, для разных значений безразмерного времени  $\tau = ct/\Delta x$ . (Из [2]).

Кроме этого, на рис. 3.6 возникает ряд дополнительных пиков, в том числе и при отрицательных значениях  $x$ . Т.е. мы наблюдаем распространение группы коротких волновых компонент навстречу физической адвекции. Так как подобные волны противоречат физическим свойствам адвекции, они называются *паразитарными волнами*. Таким образом, при наличии сильных неоднородностей начальных условий применение центральных разностей к уравнению адвекции может дать совершенно неудовлетворительное приближение к точному решению.

### 3.9.2 Схемы с нецентральными пространственными разностями

Пространственная производная в (3.99) может быть аппроксимирована и с помощью нецентральных разностей, например (3.9). Рис. 3.7 показывает результаты расчетов адвекции первоначально прямоугольной неоднородности при применении уравнений (3.99), (3.102) и (3.9). Видно, что решение точного дифференциального уравнения адвекции соответствует перемещению неоднородности со скоростью  $c$ . Конечно-разностная схема с центральными разностями (3.102), аналогично рис. 3.6, дает замедление скорости перемещения неоднородности, ее расплывание, а также появление паразитарных волн в отрицательной области оси  $x$ . Схема с нецентральными разностями (3.9) не создает паразитарных волн и замедление скорости перемещения максимума на рис. 3.7 меньше, чем у схемы с центральными разностями. Однако, потеря формы первоначальной неоднородности и ее расширение при применении нецентральных разностей значительно увеличиваются.

Следовательно, едва ли можно сказать, что использование схемы с нецентральными разностями против потока вместо схемы центральных разностей второго порядка всегда улучшает решение.

Использование дополнительных точек сетки для получения разностей более высокого порядка аппроксимации порождает дополнительные вычислительные моды, аналогично тому, как привлечение более чем двух уровней для аппроксимации производной по времени приводит к появлению временной вычислительной моды. Более того, формулирование граничных условий становится более сложным, а упрощенная их постановка может быть источником серьезных проблем.

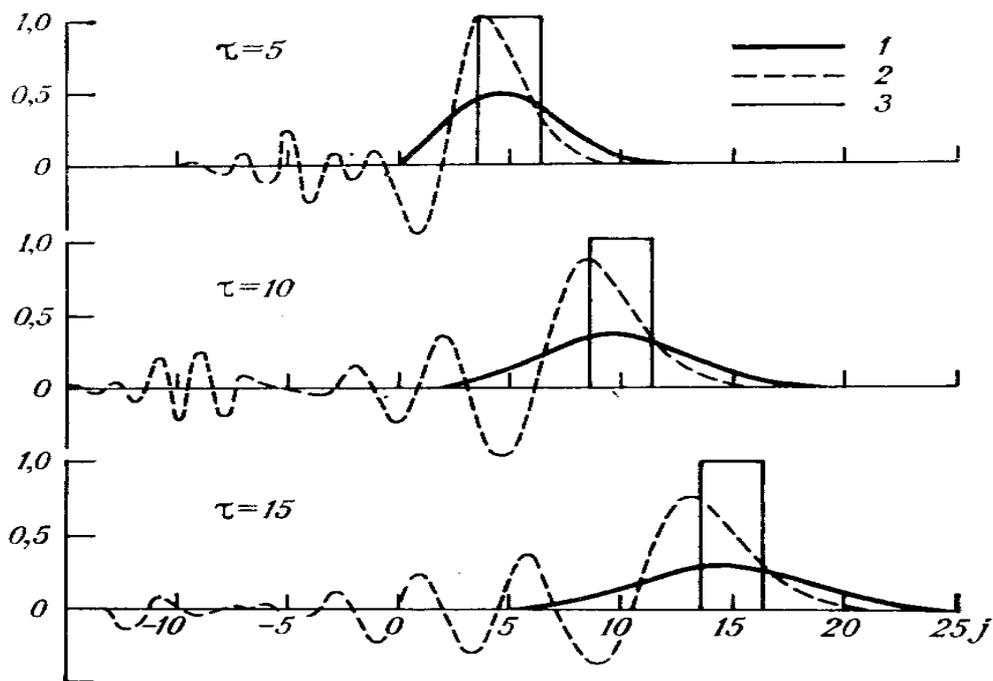


Рис. 3.7. Аналитические решения для разных значений безразмерного времени  $\tau$ : (3) дифференциального уравнения адвекции (3.99) и его конечно-разностных аналогов с использованием (2) центральных разностей (3.102) и (1) разностей против потока (3.9). (Из. [2]).

Постепенное увеличение мощностей ЭВМ позволяет ожидать, что разрешение в атмосферных моделях улучшится настолько, что ошибки описания адвекции перестанут быть преобладающими. В настоящее же время ошибки аппроксимации горизонтальных адвективных членов уравнений гидродинамики являются главными при краткосрочном численном прогнозировании (до 40% общей ошибки). Другим путем улучшения описания адвекции мелкомасштабных систем является развитие вычислительных методов с использованием лагранжевой системы уравнений вместо традиционной эйлеровской системы. Такие методы развиваются в численном моделировании атмосферной динамики.

### 3.9.3. Двумерное уравнение адвекции

Рассмотрим линейное двумерное уравнение адвекции

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_x \frac{\partial v}{\partial x} + c_y \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad c_x, c_y = \text{const}, \quad (3.107)$$

где  $v = v(x, y, t)$  — функция двух пространственных переменных;  $c_x, c_y$  - компоненты скорости адвекции. Полная скорость адвекции  $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$ . Аппроксимируем пространственные производные стандартными разностями второго порядка точности:

$$\frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} = -c_x \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - c_y \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}, \quad (3.108)$$

где  $i$  и  $j$  – номера узлов сетки по осям  $x$  и  $y$ , соответственно. Как обычно в методе Неймана, ищем решение этого уравнения в виде

$$v_{i,j} = \text{Re}[V(t)e^{i(kx+ly)}]. \quad (3.109)$$

Подставляя (3.109) в (3.108) приходим к уравнению колебаний

$$\frac{dV}{dt} = i \left( -\frac{c_x}{\Delta x} \sin k\Delta x - \frac{c_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) V. \quad (3.110)$$

Если применить схему центральных разностей для аппроксимации производной по времени, то стандартным образом можно получить критерий устойчивости вида

$$\left| \left( \frac{c_x}{\Delta x} \sin k\Delta x + \frac{c_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) \Delta t \right| \leq 1. \quad (3.111)$$

Левая часть имеет максимум при  $\sin k\Delta x = \sin l\Delta y = 1$  и  $c_x = c_y = c/\sqrt{2}$ . Тогда критерий устойчивости (3.111) принимает вид

$$\sqrt{2}c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (3.112)$$

Сравнивая с (3.12), видим, что в двумерном случае при заданном  $\Delta x$  мы должны выбрать шаг по времени в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем разрешается для одномерного случая.

### 3.10. Нелинейная неустойчивость

Нелинейность уравнений гидродинамики создает дополнительный источник ошибок при численном моделировании геофизических процессов. Их природа связана с особенностями представления непрерывных физических процессов на дискретных пространственных и временных сетках.

### 3.10.1. Ошибки ложного представления

При рассмотрении ограничений сеточного метода выше отмечалось, что при заданном пространственном шаге  $\Delta x$  дискретное представление  $v_j$  несет информацию только о Фурье-гармониках с длинами большими, чем  $2\Delta x$ . Этой минимальной длине волны соответствует максимальное значение  $k_{max} = \pi/\Delta x$ . Рассмотрим, как изобразится на сетке волна с длиной меньшей, чем  $2\Delta x$ . Пример для длины волны  $3\Delta x/4$  приведен на рис. 3.8 и показывает, что на сетке с конечными шагами эта волна неотличима от волны с длиной  $4\Delta x$ .

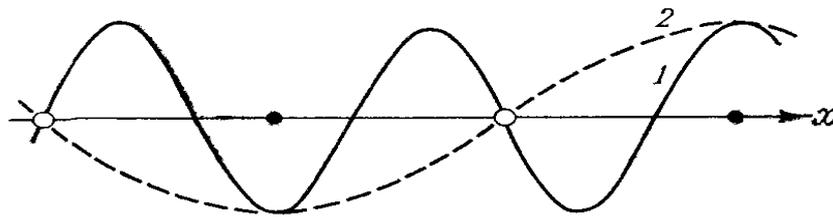


Рис. 3.8. Волна длиной  $3\Delta x/4$  – кривая (1), которая на конечно-разностной сетке с шагом  $\Delta x$  ошибочно принимается за волну длиной  $4\Delta x$  – кривая (2).

В общем случае, для сеточного представления гармоники с  $k > k_{max}$  можно записать соотношение

$$\sin kj\Delta x = -\sin(2k_{max} - k)j\Delta x. \quad (3.113)$$

Таким образом, если известны только значения в узлах сетки, то мы не можем отличить волновое число  $k$  от числа  $2k_{max}-k$ . Это значит, что волна с волновым числом  $k > k_{max}$  будет ложно представляться волной с

$$k^* = 2k_{max} - k. \quad (3.114)$$

Следовательно, как показано на рис. 3.9, видимая волна имеет волновое число  $k^*$ , которое меньше  $k_{max}$  на ту же величину, на которую  $k$  было больше, чем  $k_{max}$ . Можно представить волновое число  $k^*$  как некоторое зеркальное отражение величины  $k$  относительно точки  $k_{max}$  в пределы области допустимых значений волновых чисел  $k < k_{max}$  (см рис. 3.9).

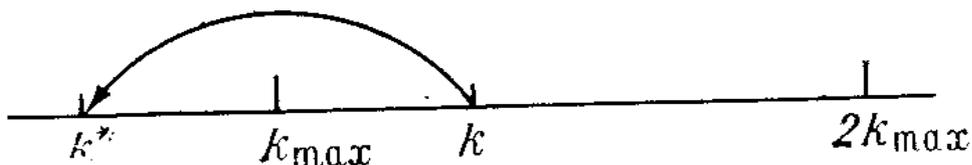


Рис. 3.9. Ложное представление волнового числа  $k > k_{max}$  на сетке согласно (3.114).

Такую подмену длин волн и волновых чисел можно назвать *ошибкой ложного представления* коротких волн на сетке с фиксированным шагом.

### 3.10.2. Механизм нелинейной неустойчивости

Обобщением простого одномерного линейного уравнения адвекции (3.99) является рассмотрение нелинейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.115)$$

Подобные нелинейные адвективные члены широко встречаются в уравнениях гидродинамики. Можно считать, что функция  $u$  состоит из некоторого числа Фурье компонент

$$u(x) = \sum_n (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x). \quad (3.116)$$

Нелинейный член будет тогда содержать произведения гармоник с различными волновыми числами, такими, как  $\sin(k_n x) \cdot \sin(k_m x)$  и  $\sin(k_n x) \cdot \cos(k_m x)$ . Такие произведения можно преобразовать в суммы:

$$\begin{aligned} \sin k_n x \sin k_m x &= \frac{1}{2} [\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x]; \\ \sin k_n x \cos k_m x &= \frac{1}{2} [\sin(k_n - k_m)x + \sin(k_n + k_m)x]. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Поэтому, даже если конечно-разностные вычисления были начаты с волнами, для которых все  $k_n < k_{max}$ , очень скоро в процессе такого нелинейного взаимодействия сформируются волны с  $k_n + k_m > k_{max}$  и возникнет ложное представление волн, как описано выше. Вследствие такого ложного представления будет происходить ложный приток энергии к волновым числам, не на много меньшим, чем  $k_{max}$ . Энергия этих компонент может возрастать, выходить за рамки физически допустимых границ и приводить к «взрыву» решения. Такое явление, обусловленное нелинейностью решаемых уравнений, называется *нелинейной неустойчивостью*. Нелинейная неустойчивость была впервые обнаружена Филлипсом в его работе, положившей начало численному моделированию общей циркуляции атмосферы.

### 3.10.3. Подавление и предотвращение нелинейной неустойчивости

Если интегрирование должно осуществляться на большой период времени, то необходимо подавлять или предотвращать нелинейную неустойчивость. При интегрировании на короткие сроки это делать не столь обязательно, хотя такая процедура может оказаться полезной.

Одним из приемов является фильтрация коротких Фурье гармоник с  $k$  близкими к  $k_{max}$ . Орзаг отмечал, что для исключения ошибок ложного представления достаточно исключить только треть возможных волновых гармоник, потому что, если волны с  $k > 2k_{max}/3$  отфильтрованы, то все ложные волны будут тоже удовлетворять условию  $k > 2k_{max}/3$  и, следовательно, будут исключены.

Вместо фильтрации коротких гармоник могут применяться разностные схемы, которые обладают свойством сглаживания самых коротких волн. Экспериментально было найдено, что такой подход действительно приводит к подавлению нелинейной неустойчивости. При этом диссипативную численную схему часто можно использовать периодически через довольно большие интервалы времени. Существуют рекомендации добавлять в недиссипативные схемы диссипативные члены для более удобного контроля этого процесса.

Другим способом избавления от нелинейной неустойчивости является использование лагранжева описания адвективных членов вместо эйлера подхода. Для этого рассчитывается положение частицы, которая должна быть перенесена в точку сетки за рассматриваемый интервал времени  $\Delta t$ . Значение зависимой переменной, соответствующее этому положению, может быть найдено путем интерполяции в пространстве. Изменение вследствие адвекции равно разности между значением, полученным путем интерполяции, и значением в точке сетки. В некоторых случаях лагранжевы схемы оказываются идентичными эйлеровым, но могут быть и существенно отличающиеся схемы.

Отличный подход для устранения нелинейной неустойчивости предложил и развил Аракава. Его идея состоит в построении схемы для аппроксимации адвективных членов, которые были бы свободны не только от нелинейной неустойчивости, но и от ложного притока энергии к коротким волнам. Для их получения необходимо в конечно-разностной форме обеспечить сохранение интегральных свойств исходных дифференциальных уравнений.

Аракава построил ряд схем, в которых вычислительный энергетический каскад контролируется посредством сохранения среднего волнового числа при адвекции за счет бездивергентной компоненты потока.

### 3.11. Уравнения для гравитационных и гравитационно-инерционных волн

В этой главе мы рассмотрим уравнения, описывающие горизонтальное распределение гравитационных и гравитационно-инерционных волн. Математически это означает, что мы будем иметь дело с системой двух или трех уравнений в частных производных первого порядка.

Существуют две главные проблемы при конечно-разностном интегрировании уравнений, описывающих движение атмосферы. Первая проблема заключается в надлежащем описании процесса *квазигеострофического приспособления*. Благодаря этому процессу в атмосфере устанавливается квазибездивергентное состояние крупномасштабных движений, близкое к геострофическому (см. (1.53)). Такое состояние возникает главным образом как результат сравнительно быстрого приспособления полей давления и ветра путем разбегания гравитационно-инерционных волн из областей нарушения их геострофического баланса (1.51). Соответствующие вычислительные вопросы будут обсуждены в этой главе. Второй проблемой является предсказание или моделирование крупномасштабного квазигеострофического потока после его установления. Здесь горизонтальная адвекция является доминирующим механизмом.

Интенсивные исследования проблем интегрирования мезомасштабных уравнений, описывающих поведение инерционно-гравитационных волн, началось в атмосферном моделировании значительно позднее, чем исследования уравнения адвекции. В течение первого десятилетия исследований по численному прогнозированию атмосферных процессов успешные результаты были получены главным образом благодаря исключению из уравнений гравитационно-инерционных волн в результате использования геострофического приближения для уравнения вихря. Эти уравнения, в которых исключены гравитационно-инерционные волны, обычно называют *фильтрованными уравнениями*. Применительно к ним можно обойтись без специального решения проблемы геострофического приспособления.

Усилия, направленные на улучшение качества численных прогностических моделей, привели к включению в рассмотрение негеострофических эффектов. Это очень трудно делать в рамках модифицированной системы гидродинамических уравнений. Поэтому специалисты по моделированию снова вернулись к использованию системы полных уравнений гидродинамики. Их применение считается предпочтительным как для исследовательских, так и для оперативных приложений. Скорости распространения гравитационных и гравитационно-инерционных волн и их чувствительность к различным вычислительным погрешностям требуют особенно четкого рассмотрения при построении численных схем.

### 3.11.1. Одномерные гравитационные волны.

Рассмотрим вначале простейший случай гравитационных волн, когда зависимые переменные являются функциями только одной пространственной переменной. Они описываются следующими линеаризованными уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -g \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g, H = const. \quad (3.118)$$

где  $g$  – гравитационное ускорение,  $h$  – геопотенциал,  $H$  – высота однородной атмосферы. Ищем волновое решение в форме

$$u(x, t) = \text{Re}[Ue^{i(kx - \sigma t)}], \quad h(x, t) = \text{Re}[\Phi e^{i(kx - \sigma t)}] \quad (3.119)$$

и, подставляя в (3.118), получаем однородную систему

$$\sigma U = gk\Phi, \quad \sigma\Phi = HkU. \quad (3.120)$$

Отсюда получаем уравнение для частоты

$$\sigma^2 = gHk^2. \quad (3.121)$$

Поэтому горизонтальная фазовая скорость описывается выражением

$$c = \frac{\sigma}{k} = \pm\sqrt{gH}, \quad (3.122)$$

т.е. гравитационные волны могут распространяться вдоль оси  $x$  в обоих направлениях со скоростью  $\sqrt{gH}$ . Эта скорость не является функцией волнового числа, поэтому здесь дисперсия волн отсутствует. Рассмотрим теперь дифференциально-разностные уравнения, получающиеся путем аппроксимации пространственных производных в (3.118) с помощью центральных разностей:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -g \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial h_j}{\partial t} = -g \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}. \quad (3.123)$$

Подстановка (3.119) в (3.123) приводит к следующему уравнению для частоты:

$$\sigma^2 = gH \left( \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right)^2 k^2. \quad (3.124)$$

Сравнивая (3.124) и (3.121), видим, что гравитационные волны теперь распространяются с фазовой скоростью

$$c^* = \pm\sqrt{gH} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}. \quad (3.125)$$

Эта скорость является функцией волнового числа  $k$ , т.е. использование пространственной разностной аппроксимации привело к вычислительной дисперсии аналогично п. 3.9.1. Формула (3.125) имеет тот же вид, что и формула (3.104) для уравнения адвекции. Таким образом, фазовая и групповая скорости зависят от волнового числа, как это показано на рис. 3.5. Фазовая скорость уменьшается с уменьшением длины волны, а волна длиной  $2\Delta x$  является стационарной.

Однако имеется важное отличие рассматриваемой задачи от задачи адвекции, потому что теперь мы имеем две зависимые переменные. Мы предполагали, что они определены в каждой точке сетки, как показано на рис. 3.10. Однако, что касается системы (3.123), то каждая подчеркнутая на рис. 3.10 величина зависит только от других подчеркнутых величин. Это же относится и к неподчеркнутым величинам. Таким образом, система точек на рис. 3.10 распадается на две элементарные подсистемы с абсолютно независимыми решениями в каждой из них.

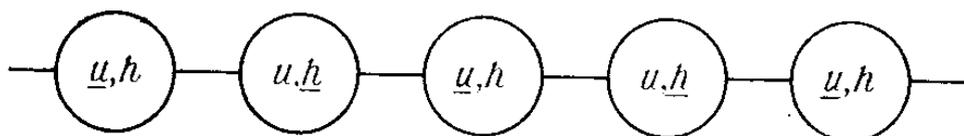


Рис. 3.10. Сетка с двумя зависимыми переменными, которые содержатся в каждой точке. (Из [2]).

Следовательно, можно вычислять только одно из этих решений, например, используя точки, показанные на Рис. 3.11. Такая сетка, в которой переменные заданы в разных точках пространства, называют *расшитанной (или шахматной) сеткой*.

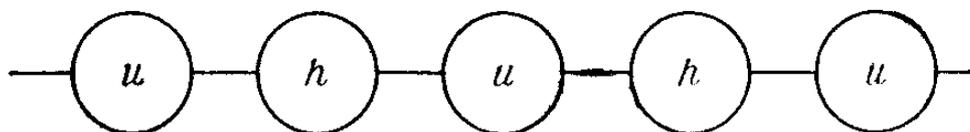


Рис. 3.11. Сетка с двумя зависимыми чередующимися переменными. (Из [2]).

Время счета, необходимое для решения (3.123) на этой сетке, сокращается в 2 раза, а ошибка аппроксимации остается той же. Более того, волны с  $k\Delta x > \pi/2$  исключены, а это как раз те волны, которые связаны с большими ошибками в фазовой скорости и отрицательной групповой скоростью (см. рис. 3.5). Это является весьма значительным улучшением.

Если мы хотим, чтобы в наших расчетах участвовали волны с длинами между  $4\Delta x$ ; и  $2\Delta x$ , то можно сократить пространственный шаг вдвое и осуществить более точное интегрирование, используя то же самое время счета, которое потребовалось бы для нерасшатанной сетки.

### 3.11.2. Гравитационно-инерционные волны

В этом разделе мы обсудим влияние аппроксимации с применением центральных пространственных разностей на описание гравитационно-инерционных волн. Для этого рассмотрим систему линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + fv, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - fu, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{3.126}$$

Эти уравнения отличаются от (3.119) присутствием кориолисовых членов, которые не содержат производных. Система (3.126) является частью полной системы уравнений гидродинамики. Полные уравнения допускают два различных типа движения: низкочастотные квазигеострофические квазидивергентные движения и более высокочастотные гравитационно-инерционные волны. Гравитационно-инерционные волны постоянно возбуждаются в атмосфере. Однако, их энергия быстро уходит из области генерации. Этот процесс известен как *геострофическое приспособление*. Остальное движение находится в состоянии квазигеострофического баланса и медленно изменяется во времени.

В этой главе мы сосредоточим свое внимание на правильном моделировании процесса адаптации полей, который в принципе описывается уравнениями (3.126) для гравитационно-инерционных волн (в линейном приближении).

Рассмотрим пять вариантов сеток для распределения в пространстве зависимых переменных. Они показаны на рис. 3.12. Обозначим через  $d$  кратчайшее расстояние между точками, в которых определяются одни и те же зависимые переменные. Для каждой из пяти сеток рис. 3.12 значения  $d$  одинаковы. Следовательно, все сетки имеют одинаковое число зависимых переменных на единицу площади. Время счета, необходимое для интегрирования по каждой из сеток, будет примерно одинаковым, но свойства полученных решений будут отличаться из-за эффекта пространственного распределения переменных.

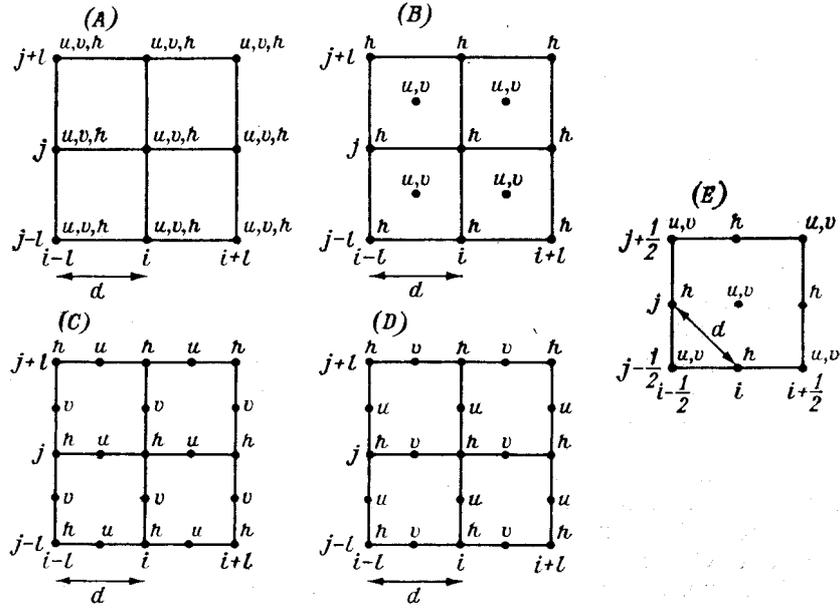


Рис. 3.12. Пять типов решеток, рассматриваемых для конечно-разностного решения уравнения (3.126). (Из [2]).

Используя обозначения, показанные на Рис. 3.12, определим центрированный пространственный разностный оператор

$$(\delta_x \alpha)_{i,j} = \frac{1}{d} (\alpha_{i+1/2,j} - \alpha_{i-1/2,j}), \quad (3.127)$$

где  $\alpha$  - любая переменная, а  $d'$  - расстояние между точками, использованными при написании конечных разностей. Таким образом, для сеток (A)-(D) расстояние  $d' = d$ , а для сетки (E)  $d' = \sqrt{2}d$ . Проанализируем сначала одномерный случай, когда переменные  $u, v, h$  в (3.126) не зависят от координаты  $y$ . В этом случае, подставляя выражения типа (3.119) в конечно-разностные аналоги уравнения (3.126), можно получить следующие соотношения для частот при использовании сеток (A) – (E) с рис. 3.12, соответственно:

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd, \quad (3.128A)$$

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2 = 1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad (3.128B)$$

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad (3.128C)$$

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd, \quad (3.128D)$$

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{\sqrt{2}}, \quad (3.128E)$$

где  $\lambda = \sqrt{gH} / f$ . На Рис. 3.13 изображены функции  $|\sigma|/f$  для пяти рассматриваемых сеток.

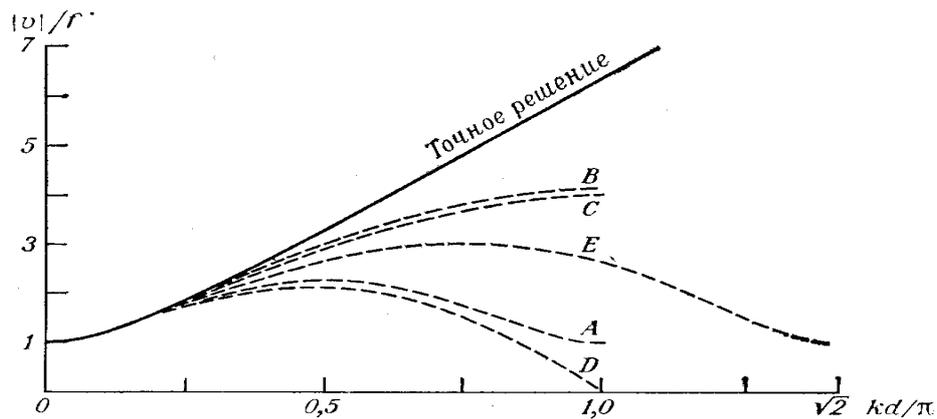


Рис. 3.13 (3.4). Функции  $|\sigma|/f$  для точного решения уравнения (3.126), а также заданные выражениями (3.128) при  $\lambda/d = 2$ .

Сравнение точного и приближенных значений на Рис. 3.13 показывает наибольшие расхождения для сеток (A) и (D). Свойства остальных трех сеток заметно лучше, хотя нулевая групповая скорость имеет место для всех сеток. Следовательно, для каждой сетки будут трудности при описании процесса геострофического приспособления.

Анализ более общего двумерного случая, когда переменные  $u$ ,  $v$ ,  $h$  в (3.126) зависят от обеих координаты  $x$  и  $y$ , показал, что при  $\lambda/d > 1$  сетка (C) обладает тем преимуществом, что не содержит волновых гармоник с неправильным знаком групповой скорости. Поэтому сетка (C) была признана лучшей и использована, например, в модели общей циркуляции Калифорнийского университета и в английской оперативной модели.

Использование сеток (B) или (E) приводит к некоторым трудностям, связанным с ложными низкочастотными колебаниями самых коротких волн. Двухшаговая волна ведет себя как чисто инерционное колебание.

### 3.11.3. Схема центральных разностей по времени

Свойства временных разностных схем в приложении к уравнениям для гравитационных волн могут быть изучены методом Неймана, подобно тому, как это было сделано ранее для уравнения адвекции. Используем для этого одномерные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.129)$$

Используя одну из сеток рис. 3.12, а также обозначения (3.127), получим конечно-разностный аналог системы (3.129) в виде

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{n-1} - 2g \delta_x h_n \Delta t, & v_{n+1} &= v_{n-1} - 2g \delta_y h_n \Delta t, \\ h_{n+1} &= h_{n-1} - 2H (\delta_x u + \delta_y v)_n \Delta t. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Согласно методу Неймана полагаем

$$u_n = \lambda^n u_0, \quad v_n = \lambda^n v_0, \quad h_n = \lambda^n h_0, \quad (3.131)$$

где  $\lambda$  - комплексный множитель перехода, а гидродинамические переменные меняются в пространстве как  $\exp(ikx + ily)$  с волновыми числами  $k$  и  $l$  по осям  $x$  и  $y$ , соответственно. Подставляя (3.131) в (3.130), можно получить систему алгебраических уравнений. Из требования равенства нулю детерминанта этой системы однородных уравнений получается шесть решений для  $\lambda$ . Первое из них дает стационарное решение с  $\lambda_l = 1$ . Это решение физически значимо при  $k = l = 0$  и соответствует двухшаговым волнам при  $k = l = \pi/\Delta x$ . Второе решение  $\lambda_2 = -1$  соответствует ложной вычислительной моде с периодом  $2\Delta t$ , возникающей, как и раньше, из-за использования центральных разностей по времени. Остальные четыре решения задаются формулой

$$\lambda_{3-6}^2 = 1 - 4A \pm 2\sqrt{2A(2A-1)}, \quad (3.132)$$

где

$$A \equiv gH\mu^2(\sin^2 X + \sin^2 Y), \quad (3.133)$$

а также,  $\mu = \Delta t / (\sqrt{2}d^*)$ ,  $X = kd^*$  и  $Y = ld^*$ , причем  $d^*$  - кратчайшее расстояние между узлами пространственной сетки типа рис. 3.12. Модули  $|\lambda|$  не превосходят единицы при  $\sqrt{2A} \leq 1$ , что можно переписать в виде

$$\sqrt{2gH} \frac{\Delta t}{d^*} \leq 1. \quad (3.134)$$

Можно также получить выражение для относительной вычисляемой фазовой скорости

$$\frac{c^*}{\sqrt{gH}} = \frac{1}{\Delta t \sqrt{gH} (k^2 + l^2)} \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}} \right). \quad (3.135)$$

Используя (3.132), получаем при значениях  $\sqrt{2A} < 1/\sqrt{2}$  разложение в ряд Тейлора вида

$$\frac{c^*}{\sqrt{gH}} = \sqrt{\frac{\sin^2 X + \sin^2 Y}{X^2 Y^2}} \left( 1 + \frac{1}{3} A + \frac{3}{10} A^2 + \dots \right). \quad (3.136)$$

Множитель, стоящий перед скобкой, описывает эффект замедления, вызванный введением конечных разностей по пространственным переменным. Выражение в скобках в (3.136) описывает ускорение, появляющееся за счет введения схемы ЦР по времени. Оно оказывается полезным, так как оно компенсирует фазовую ошибку, возникающую за счет введения пространственных разностей.

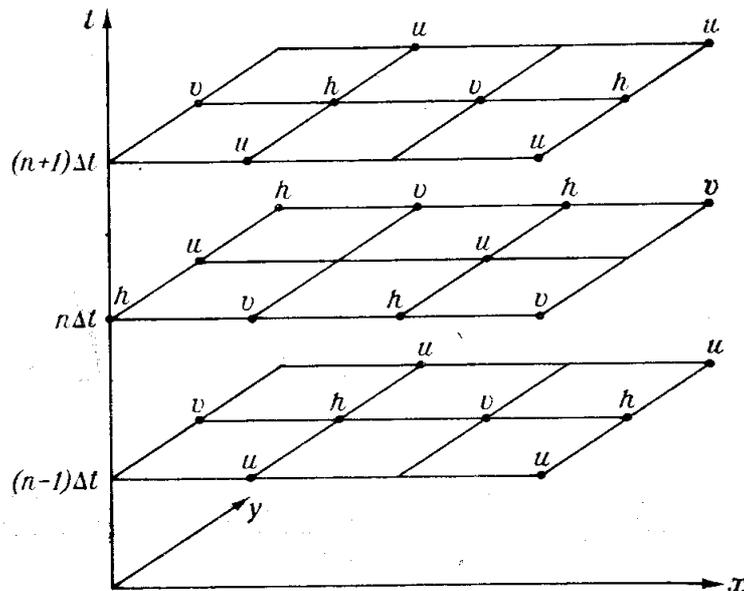


Рис. 3.14 (3.5). Пространственно-временная расштанная (шахматная) по времени и пространству сетка, удобная для применения пространственных и временных центральных разностей. (Из [2]).

Полезно отметить, что введение разностной схемы по времени позволяет получить новые возможности в распределении переменных, так как теперь сетка может быть расштанной (шахматной) и во времени. Пример такой сетки, впервые предложенной Элиассеном, и носящей его имя показан на рис. 3.14. Таким образом, как и пространственные сетки, обсуждавшиеся

выше, пространственно-временная сетка, основанная на использовании решетки (E) с рис. 3.12 на каждом шаге по времени, может рассматриваться как суперпозиция двух элементарных подсеток, представленных на рис. 3.14.

#### 3.11.4. Экономичные явные схемы

Недостатком при решении системы для описания гравитационных волн является время счета, требуемое для решения при использовании явных схем для аппроксимации производных по времени. Согласно (3.134), шаг по времени, необходимый для устойчивости численной схемы

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gH}}. \quad (3.137)$$

При типичных в атмосфере  $\sqrt{2gH} \sim 370$  м/с и  $\Delta x = 1$  км условие (3.137) записывается в виде  $\Delta t \leq 3.7$  с. Это очень мелкий шаг по времени, требующий большого расхода машинного времени при расчетах на длительные сроки. Кроме того, этот шаг много меньше того шага, который требуется для устойчивого интегрирования системы, описывающей более медленные квазигеострофические движения. С такими шагами ошибки за счет введения пространственных разностей много больше, чем ошибки вследствие использования временных разностей. Оценки показывают, что типичные ошибки за счет пространственных разностей в современных атмосферных моделях составляют примерно 40%, а за счет временных разностей - только около 1% общей ошибки. Следовательно, любая экономия, которая может быть достигнута при разностной аппроксимации производных по времени, весьма полезна, так как сэкономленное время может быть эффективно использовано для увеличения точности пространственных разностных аналогов.

Рассмотрим здесь явную схему, более экономичную, чем стандартная схема центральных разностей. Эта схема получается, если аппроксимировать члены, ответственные за описание гравитационных волн в уравнениях движения, сначала вперед направленными временными разностями, а затем в оставшихся уравнениях назад направленными разностями. Эту схему можно было бы назвать *схема с разностями вперед—назад*. Применяя далее центрированные пространственные разности, систему (3.129) в этом случае аппроксимируем уравнениями

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - g\Delta t\delta_x h_n, & v_{n+1} &= v_n - g\Delta t\delta_y h_n, \\ h_{n+1} &= h_n - H\Delta t(\delta_x u + \delta_y v)_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Подставляя волновые решения, аналогично предыдущему, находим три решения для  $\lambda$ . Одно из них  $\lambda_1 = 1$  опять соответствует нейтральному стационарному решению. Остальные два решения равны

$$\lambda_{2,3} = 1 - A \pm \sqrt{A(A-2)}, \quad (3.139)$$

где величина  $A$  определена выражением (3.133). Анализ (3.139) показывает, что численная схема является устойчивой и нейтральной, если  $\sqrt{2A} \leq 2$ . Чтобы удовлетворить этому неравенству для всех допустимых волн, необходимо, чтобы

$$\sqrt{2gH} \frac{\Delta t}{2d^*} \leq 1. \quad (3.140)$$

Сравнивая это неравенство с (3.134), видим, что схема с разностями вперед—назад является устойчивой и нейтральной с шагами по времени в 2 раза большими, чем схема центральных разностей. Следовательно, схема с разностями вперед—назад вдвое экономичнее, чем схема центральных разностей. В дополнение к этому она, как двухуровневая схема, не содержит временной вычислительной моды.

### 3.11.5. Неявные схемы

Шаг по времени, достигаемый при использовании экономичных явных схем, в 2 раза больше, чем шаг, допустимый для схем центральных разностей. Однако, он все же существенно меньше, чем временной шаг, который требуется для точного интегрирования медленных квазигеострофических движений. Даже с экономичными явными схемами ошибка разностной аппроксимации производных по времени все еще намного меньше, чем ошибка разностной пространственной аппроксимации для характерных современных атмосферных моделей. Поэтому целесообразно рассмотреть неявные схемы, которые являются устойчивыми для любого шага по времени. Рассмотрим здесь только простейшую из неявных схем, использующую метод трапеций (см. (3.36) в п. 3.6.1). В применении к системе (3.129), описывающей чисто гравитационные волны, соответствующая конечно-разностная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - g(\delta_x h_n + \delta_x h_{n+1})\Delta t / 2, & v_{n+1} &= v_n - g(\delta_y h_n + \delta_y h_{n+1})\Delta t / 2, \\ h_{n+1} &= h_n - H[(\delta_x u + \delta_y v)_n + (\delta_x u + \delta_y v)_{n+1}]\Delta t / 2. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Подставляя волновые решения, найдем три решения для  $\lambda$ . Одно из них  $\lambda_l = 1$  опять соответствует нейтральному стационарному решению. Остальные два решения равны

$$\lambda_{2,3} = \frac{2}{2+A} \left( 1 - \frac{A}{2} \pm \sqrt{-2A} \right). \quad (3.142)$$

Анализ этого выражения показывает, что множители перехода удовлетворяют условию

$$|\lambda| = 1. \quad (3.143)$$

Следовательно, эта схема абсолютно устойчива и нейтральна при любых значениях  $\Delta t$ . Используя (3.142) и (3.135), можно найти выражение для относительной фазовой скорости нестационарных решений

$$\frac{c^*}{\sqrt{gH}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2gH(X^2 + Y^2)}} \operatorname{arctg} \left( \mp \frac{2\sqrt{2A}}{2-A} \right). \quad (3.144)$$

Сравнение (3.144) и (3.136) показывает, что неявная разностная временная схема приводит к существенному замедлению гравитационных волн, имеющему такой же порядок, что и замедление вследствие введения центральных пространственных разностей.

Для того чтобы применить неявный метод, необходимо решить разностную систему относительно переменных на уровне  $n+1$ . Это может быть сделано с помощью целого ряда стандартных методов. Наиболее широко применяемый из них—*релаксационный метод*—будет обсуждаться в следующем разделе.

### 3.11.6. Полуявные схемы.

Для разностного представления адвективных, кориолисовых и других членов в прогностических уравнениях атмосферных нет никаких преимуществ в использовании неявного подхода. Это связано с малыми скоростями их эволюции, так что разностная аппроксимация не должна приводить к требованию об использовании исключительно малых шагов по времени для обеспечения линейной устойчивости при использовании явных схем. Следовательно, медленные компоненты могут быть вычислены по какой-либо явной схеме. В то же время, для членов уравнений, описывающих гравитационно-инерционные волны, используется неявная схема по времени. Конечно-разностные схемы, построенные таким образом, называются *полуявными схемами*. Рассмотрим такую схему на примере системы уравнений, аналогичной (3.129) и имеющей вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + A_u, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} + A_v, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A_h,\end{aligned}\tag{3.145}$$

где  $A_u$ ,  $A_v$ ,  $A_h$  обозначают члены уравнений гидродинамики, которые были опущены в системе (3.129) и которые описывают медленно эволюционирующие процессы. Если использовать схему центральных разностей для аппроксимации этих медленных членов, а неявную схему на временном интервале  $2\Delta t$  - для аппроксимации членов, описывающих гравитационные волны, то из (3.145) получим:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_{n-1} - g(\delta_x h_{n-1} + \delta_x h_{n+1})\Delta t + 2A_{um}\Delta t, & v_{n+1} &= v_{n-1} - g(\delta_y h_{n-1} + \delta_y h_{n+1})\Delta t + 2A_{vm}\Delta t, \\ h_{n+1} &= h_{n-1} - H[(\delta_x u + \delta_x v)_{n-1} + (\delta_x u + \delta_x v)_{n+1}]\Delta t + 2A_{hm}\Delta t.\end{aligned}\tag{3.146}$$

Сложность решения этой полунявной системы уравнений (так же, как и неявных уравнений (3.141)) заключается в том, что искомые значения на  $n+1$  – ом шаге по времени входят в правые части уравнений. Поэтому уравнения (3.141) или (3.146) должны быть предварительно решены относительно этих переменных. В общем случае это представляет значительные трудности. Это усложняется также тем, что число уравнений обычно слишком велико (порядка 1000 и более). Часто вместо решения уравнений относительно переменных на  $n+1$  шаге используется итерационный *релаксационный метод*. Он состоит из следующих этапов:

- а) для  $u_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$ ,  $h_{n+1}$  выбирается нулевое приближение, в качестве которого обычно используются соответствующие поля на предыдущем временном шаге;
- б) в каждой точке сетки это нулевое приближение подставляется в правые части уравнений (3.145) или (3.141) и вычисляются исправленные значения  $u_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$  и  $h_{n+1}$ ;
- в) предшествующий этап повторяется столько раз, сколько необходимо для того, чтобы изменение (т. е. невязка) для всех переменных в каждой точке стала меньше, чем некоторая наперед заданная малая величина.

Такой релаксационный метод обычно обладает сходимостью. Часто сходимость убыстряется, если изменения, вычисленные, чтобы точно удовлетворить уравнению, умножаются на множитель, имеющий значение 1—2 (множитель перерелаксации) до того, как они прибавляются к значениям для предыдущей итерации. Для конкретной задачи оптимальное значение этого множителя может быть найдено путем численных экспериментов, в которых требуемое количество итераций находится как функция величины множителя перерелаксации.

Алгебраическая система уравнений типа (3.146), может также быть решена прямыми методами. Прямой метод может быть более эффективен, чем релаксационная процедура. В

частности, он обычно используется, когда релаксация требует большого времени счета, что может иметь место, например, в задачах конвекции. Когда неявные схемы используются для моделирования или прогноза крупномасштабных атмосферных движений, время, необходимое для осуществления релаксационного процесса, в несколько раз меньше, чем время, требуемое для других этапов процедуры интегрирования, так что только малая часть общего машинного времени счета может быть сэкономлена при использовании более быстрого прямого метода. По этой причине прямые методы, требующие к тому же больших программистских усилий, не нашли широкого применения в этих моделях.

Неявные и полунеявные схемы были впервые интенсивно использованы в атмосферных моделях акад. Марчуком [5]. Такие схемы, несомненно, являются наиболее эффективными схемами, используемыми в атмосферных моделях. Чтобы достичь этой экономии, надо приложить дополнительные усилия для решения алгебраических уравнений. Кроме того, применение этих схем приводит к заметному замедлению гравитационных волн. Поэтому, оказывается, что неявные схемы недостаточно пригодны для изучения деталей процесса геострофического приспособления. Однако это замедление не оказывается особенно вредным при моделировании и прогнозе крупномасштабных квазигеострофических движений. Кроме того, время счета, сэкономленное при применении неявных схем, может быть использовано для уменьшения размера шага сетки. Это в свою очередь приводит к уменьшению ошибки фазовой скорости для всех волн, включая гравитационные.

### 3.11.7. Метод расщепления (метод Марчука)

Системы гидродинамических уравнений содержит различные физические факторы, изменяющиеся с различными скоростями. Поэтому можно стремиться к применению различных конечно-разностных схем для описания членов, связанных с различными физическими процессами. Например, рассматривая линеаризованную систему, включающую адвективные члены и члены, ответственные за описание гравитационных волн,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{3.147}$$

можно было бы использовать одну схему для аппроксимации адвективных, а другую - для аппроксимации гравитационно-волновых членов примерно таким же образом, как это делается в

полуявной схеме (см. выше). В этой ситуации, даже если обе примененные схемы были бы устойчивыми, при независимом рассмотрении нельзя быть уверенными в том, что схема, полученная как комбинация этих двух схем, будет также устойчивой.

Эти проблемы могут быть обойдены путем применения метода расщепления. Идея метода заключается в том, чтобы сложная система уравнений в пределах каждого временного шага расщеплялась на несколько более простых подсистем, решаемых последовательно во времени. Для системы (5.30) в пределах  $n+1$ -го временного шага можно сначала решить систему уравнений адвекции

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{3.148}$$

Обозначим промежуточные значения  $u_{n+1}$  и  $h_{n+1}$ , полученные таким путем, через  $u^*$  и  $h^*$ . Используем их в начале временного шага для решения оставшейся подсистемы

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{3.149}$$

Значения  $u_{n+1}$  и  $h_{n+1}$ , полученные после решения этой подсистемы, принимаются за окончательные приближенные значения переменных на уровне  $n+1$ . Эта процедура повторяется на каждом следующем временном шаге.

Решение, полученное методом расщепления, будет представлять собой согласованную аппроксимацию точного решения. Чтобы изучить устойчивость схем, построенных с помощью метода расщепления, рассмотрим пример системы (3.147). Обозначим через  $\lambda_a$  и  $\lambda_b$  величины множителей перехода  $\lambda$  для схем, выбранных для численного решения подсистем (3.148) и (3.149) соответственно. Тогда имеем

$$u^* = \lambda_a \lambda^n u_0, \quad h^* = \lambda_a \lambda^n h_0\tag{3.150}$$

и

$$u_{n+1} = \lambda_a \lambda_b \lambda^n u_0, \quad h_{n+1} = \lambda_a \lambda_b \lambda^n h_0.\tag{3.151}$$

Следовательно, получаем  $\lambda = \lambda_a \lambda_b$  и

$$|\lambda| = |\lambda_a| |\lambda_b|.\tag{3.152}$$

Таким образом, если обе схемы, выбранные для решения подсистем (3.148) и (3.149), устойчивы, то и комбинации этих схем, построенные по методу расщепления, также устойчивы. Это заключение может быть обобщено для произвольной системы уравнений и произвольного числа подсистем.

Применяя метод расщепления, не обязательно использовать одинаковые временные шаги для каждой подсистемы. Это является главным достоинством метода расщепления: можно выбрать относительно большой шаг для подсистем, описывающих медленные процессы (в нашем примере адвекцию), а затем использовать несколько меньшие шаги для расчета более быстрых процессов. Поскольку процесс переноса является наиболее трудоемким по объему вычислений, то таким путем можно достичь существенной экономии. Недостаток метода заключается в том, что вычисление различных физических факторов последовательно по времени обычно ведет к увеличению ошибки аппроксимации. Например, процедура расщепления системы прогностических уравнений на этапы адвекции и адаптации не позволяет использовать временные шаги, превышающие 12—15 мин, иначе ошибка аппроксимации по времени становится значительной.

Метод расщепления был впервые применен в атмосферных моделях Г. И. Марчуком (см. [5]), поэтому в метеорологии он также известен как *метод Марчука*.

### **3.12. Временные шумы и фильтрация по времени**

В дополнение к быстрорастущим коротковолновым пространственным шумам (обсуждавшимся в предыдущих главах), в численных моделях могут также наблюдаться и высокочастотные временные шумы. Одним из механизмов, приводящих к этому при использовании схемы центральных разностей по времени, является разделение решений на чередующихся временных шагах, при котором генерируется двухшаговый временной шум.

Кроме этого, высокочастотный шум появляется в атмосферных моделях как результат известных трудностей в получении реальных начальных данных, представляющих крупномасштабные атмосферные движения. Данные наблюдений: а) содержат инструментальные ошибки, б) подвержены воздействию мезо- и микромасштабных движений, в) не связаны с узлами сетки модели и, наконец, г) совершенно отсутствуют над относительно большими районами земного шага. В результате действия всех этих факторов численный прогноз будет содержать паразитарные быстрорастущие гравитационные волны, если

начальные значения в узлах сетки проинтерполированы непосредственно по данным наблюдений.

В настоящее время значительная часть наблюдений является непрерывной во времени и не связана с определенными сроками наблюдений. Методы, использующиеся для извлечения максимальной информации из такого типа данных, тесно связаны с использованием прогностических моделей для усвоения этих данных во времени и пространстве. При таком подходе в процессе интегрирования по времени генерируется относительно интенсивный высокочастотный шум.

Первый из механизмов образования двухшаговых шумов - разделение решений на чередующихся временных шагах - может быть подавлен применением двухуровневых схем на перемежающихся шагах.

Другим методом, используемым для усиления подавления высокочастотных шумов в атмосферных моделях, является применение временных фильтров. Для применения этого подхода необходимо иметь фильтруемые поля, по крайней мере, за три последовательных шага. Рассмотрим, например, функцию

$$U(t) = U(0)e^{i\sigma t}, \quad (3.153)$$

причем известны значения  $U(t-\Delta t)$ ,  $U(t)$  и  $U(t+\Delta t)$ . Применим, так называемый, *центрированный частотный фильтр*:

$$\bar{U}(t) = U(t) + \frac{S}{2}[U(t+\Delta t) - 2U(t) + U(t-\Delta t)], \quad (3.154)$$

где  $S$  – параметр фильтра. Величина  $\bar{U}(t)$  обозначает фильтрованное значение функции, причем

$$\bar{U}(t) = RU(t), \quad (3.155)$$

где комплексный множитель  $R$  называется *реакцией фильтра*. Подставляя (3.155) в (3.154) и используя (3.153), получаем

$$R = 1 - S(1 - \cos \sigma \Delta t). \quad (3.156)$$

Комплексное число  $R$  в (3.155) представимо в виде

$$R = |R| e^{i\delta}, \quad (3.157)$$

причем модуль  $|R|$  и аргумент  $\delta$  описывают изменение амплитуды и фазы спектральной компоненты с частотой  $\sigma$  при прохождении через фильтр. Поскольку величина (3.156)

вещественна,  $\delta = 0$  и фильтр (3.154) не изменяет фазы сигнала. В рамках критерия устойчивости (3.12) и для малых положительных значений  $S$  модуль множителя (3.156) увеличивает демпфирующий эффект с увеличением частоты.

Однако, когда фильтр применяется непрерывно в течение численного интегрирования, значения  $U(t-\Delta t)$  уже оказываются пропущенными через фильтр. Тогда, соответственно, надо рассмотреть фильтр

$$\bar{U}(t) = U(t) + \frac{S}{2} [\bar{U}(t + \Delta t) - 2U(t) + U(t - \Delta t)], \quad (3.158)$$

Действуя аналогично тому, как и при выводе (3.156), теперь можно получить

$$R = \frac{(2 - S)^2 + 2S^2(1 - \cos \sigma \Delta t)}{(2 - S)^2 + 4S(1 - \cos \sigma \Delta t)} e^{i\sigma \Delta t}. \quad (3.159)$$

Изменение фазы здесь отлично от нуля, но оно мало для малых значений  $\sigma \Delta t$ . Амплитуда множителя не намного отличается от амплитуды для центрированного фильтра при малых значениях  $S$ .

Анализ показывает, что, например, временной фильтр в комбинации со схемой центральных разностей может более селективно подавлять высокочастотные колебания, чем это обеспечивает схема Мацуно (т. е. более слабое подавление в области низких частот и более сильное в области высоких частот). Поскольку дополнительные затраты вычислений, необходимые для осуществления фильтрации, относительно малы, то это означает, что можно достигнуть лучших результатов при примерно двойной экономии времени счета. Однако применение такого фильтра в действительности требует хранения полей прогнозируемых переменных на трех временных уровнях, т. е. на один уровень больше, чем в стандартной схеме центральных разностей.

Применяя аналогичный подход, можно проанализировать эффект пространственного сглаживания и фильтрации.

### 3.13. Диссипация в численных схемах

Рассмотрим несколько замечаний, касающихся роли диссипации, присущей иногда численным схемам. По-видимому, использование диссипативных схем нецелесообразно для описания медленных адвективных процессов, при условии, что обеспечивается предотвращение ложного каскада энергии к коротким волнам. Однако такие паразитарные короткие волны могут все же генерироваться в результате ложного отражения на границе в области вытекания потока,

в результате резкого изменения шага сетки, а также в местах резких изменений коэффициентов. Поэтому использование диссипативных схем оправдано только в таких частях течения.

Ситуация меняется, если рассматриваются члены, описывающие гравитационно-инерционные волны, которые ответственны за процесс геострофического приспособления. Этот процесс является результатом дисперсии высокочастотных волн. Применение схем, обладающих селективными (по частотам) диссипативными свойствами, приведет к усилению подавления этих высокочастотных волн и, таким образом, к ускорению процесса приспособления, хотя для реального физического процесса характерно скорее наличие дисперсии, чем диссипации.

Таким образом, если нас интересует только конечный результат процесса геострофического приспособления, то использование диссипативных схем для аппроксимации членов, ответственных за поведение инерционно-гравитационных волн, может быть полезным, особенно когда высокочастотные волны преимущественно паразитарные. Если же мы интересуемся физическими высокочастотными волнами, то использование диссипативных схем, конечно, нецелесообразно.

### 3.14. Спектральный метод.

Начиная с 40-х годов XX века сеточные методы, обсуждавшиеся выше, широко использовались при численном моделировании крупномасштабных атмосферных процессов. Однако, впоследствии были разработаны другие численные методы, одним из которых является спектральный метод.

Совокупность уравнений гидродинамики, использующихся в какой-нибудь метеорологической модели, может быть в общем виде записана следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_i(\omega^j) = F_i(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^j); \quad \omega^j = \omega^j(\vec{r}, t); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.160)$$

где  $\omega^j$  – гидродинамические переменные (такие как компоненты скорости, плотность, давление, температура и т.п.);  $F_i$  – функции, содержащие как линейные, так и нелинейные члены;  $L_i$  – дифференциальные операторы. В большинстве уравнений  $L_i(\omega^j) = \dot{\omega}^j$ . В сеточных методах, рассматривавшихся выше, пространственная зависимость переменных представлялась значениями на дискретных сетках пространственных координат.

Альтернативным подходом является аппроксимация искомым гидродинамическим переменных конечными отрезками рядов разложений по линейно-независимым аналитическим функциям  $\psi_n(\vec{r})$ , определенным во всей области интегрирования  $S$ :

$$\omega^i(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \omega_n^i(t) \psi_n(\vec{r}). \quad (3.161)$$

При использовании таких разложений зависимость прогностических переменных по времени определяется коэффициентами разложений  $\omega_n^i(t)$ , для которых получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного решения этих уравнений дискретное представление по времени вводится так же, как и в сеточных моделях, рассмотренных выше.

Представление переменных в виде конечных рядов (3.161) в общем случае является приближенным. Ошибка такой аппроксимации должна минимизироваться с использованием некоторого критерия «наилучшего представления». В зависимости от этого критерия различают несколько разновидностей численных методов, основанных на разложениях в ряды. Так при использовании метода наименьших квадратов получается так называемый «спектральный метод». Существует «псевдоспектральный» метод, основанный на простой подстановке (3.161) в (3.160) и требовании точного удовлетворения уравнений (3.160) в конечном наборе дискретных точек, число которых равно числу коэффициентов разложения. Существует также метод конечных элементов, в котором могут использоваться оба упомянутых критерия, но при специальном выборе набора кусочно-непрерывных функций, по которым производится разложение (3.161).

Рассмотрим принципы спектрального метода для упрощенного случая одной переменной, когда (3.160) можно упростить до вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = F(\omega). \quad (3.162)$$

Начальное условие

$$\omega(\vec{r}, 0) = f(\vec{r}). \quad (3.163)$$

Разложение (3.161) теперь принимает форму

$$\hat{\omega}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \omega_n(t) \psi_n(\vec{r}). \quad (3.164)$$

В спектральном методе используется метод наименьших квадратов, т.е. требуется минимум функционала

$$J(\hat{\omega}) = \int_S \left[ \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} - F(\hat{\omega}) \right]^2 dS = \int_S \left[ \sum_{m=1}^N \frac{d\omega_m}{dt} \psi_m - F\left(\sum_{m=1}^N \omega_m \psi_m\right) \right]^2 dS = \min. \quad (3.165)$$

Условие этого минимума – равенство нулю производных от  $J(\hat{\omega})$  по  $d\omega_n / dt$ , что дает

$$2 \int_S \left[ \sum_{m=1}^N \frac{d\omega_m}{dt} \psi_m - F\left(\sum_{m=1}^N \omega_m \psi_m\right) \right] \psi_n dS = 0. \quad (3.166)$$

Это выражение упрощается, если  $\psi_n$  – ортогональные функции, для которых

$$\int_S \psi_m \psi_n dS = \begin{cases} I_{mn} & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases} \quad (3.167)$$

В этом случае из (3.166) получаем

$$\frac{d\omega_n}{dt} = \frac{1}{I_{nn}} \int_S F\left(\sum_{m=1}^N \omega_m \psi_m\right) \psi_n dS, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.168)$$

Начальные условия для этих уравнений имеют вид

$$\omega_n(0) = \frac{1}{I_{nn}} \int_S \omega(\bar{r}, 0) \psi_n dS. \quad (3.169)$$

Уравнения (3.168) дают наилучшую (в смысле метода наименьших квадратов) аппроксимацию производных, соответствующую спектральному методу. Анализ свойств спектрального метода, например, для уравнения адвекции (3.6) показывает, что в этом случае естественными функциями  $\psi_n$  являются синусы и косинусы, т.е. разложение (3.164) является рядом Фурье. Кроме того, если ошибки, возникающие при дискретизации во времени исходных данных, можно игнорировать, то спектральный метод дает точное решение для всех Фурье компонент, учитываемых в (3.164). В частности, не возникает вычислительной дисперсии, такой как наблюдается при использовании метода сеток.

Недостатком спектральных методов является необходимость решения большого числа уравнений для коэффициентов разложений (3.164) и большое количество вычислений. Поэтому, на практике используют не очень большие числа слагаемых в разложениях (3.164), т.е. спектральный метод применяют для описания наиболее длинноволновых спектральных компонент. Для описания более коротких волн обычно применяют сеточные методы.

В реальных атмосферных численных моделях используются также комбинации различных методов. Например, применяется дискретное представление по времени и разложение в ряды по пространству. В некоторых моделях дискретное представление в вертикальном направлении комбинируется с разложением в ряды по горизонтальным направлениям.

При описании крупномасштабных атмосферных движений на сфере в качестве координатных функций для представления разложения (3.164) полей по горизонтали используются сферические функции, функции Хафа и тригонометрические функции.

## 4. Реальные численные модели динамики атмосферы

В этом разделе рассмотрены типичные реальные численные модели общей циркуляции и мезомасштабной динамики атмосферы.

### 4.1. Трехмерная модель общей циркуляции средней атмосферы КОММА.

Трехмерная численная модель общей циркуляции средней атмосферы "КОММА" была первоначально разработана в Кельнском университете. Она использует конечно-разностные уравнения по трем пространственным координатам на сетке, имеющей 36 точек по широте и 64 точки по долготе. По высоте число узлов может меняться в пределах от 24 до 112 в диапазоне высот 0 - 150 км, что позволяет получить более детальную структуру динамических процессов.

#### 4.1.1. Физические основы модели.

Численная трехмерная модель общей циркуляции средней атмосферы КОММА была разработана в Кельнском университете (Германия) под руководством проф. Адольфа Эбея. Модель основана на решении стандартной системы полных уравнений, включающей гидродинамические уравнения горизонтального импульса, притока тепла, неразрывности и гидростатики, которая имеет следующий вид в сферической системе координат:

1. Уравнение движения для зональной (вдоль долготы) компоненты скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u^2}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (uv \cos \varphi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u w) + \left(f + \frac{u}{r} \tan \varphi\right) v - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \Lambda_{\lambda\lambda}(u - u_i) - \Lambda_{\lambda\varphi}(v - v_i) + \frac{1}{\rho_0} \frac{m'}{\tau'} \frac{\partial}{\partial z} \frac{m'}{\tau'} \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 D \frac{\partial u}{\partial z} + F_\lambda, \quad (4.1)$$

2. Уравнение движения для меридиональной (вдоль широты) компоненты скорости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial uv}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v^2 \cos \varphi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 v w) - (f + \frac{u}{r} \tan \varphi) u - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ & - \Lambda_{\lambda \varphi} (u - u_i) - \Lambda_{\varphi \varphi} (v - v_i) + \frac{1}{\rho_0} \frac{m'}{\tau'} \frac{\partial m'}{\partial z} \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 D \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi, \end{aligned} \quad (4.2)$$

3. Уравнение притока тепла

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u T}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v T \cos \varphi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w T) - \frac{R}{m' c_p H} w T \\ & - \alpha (T - T_0) + \frac{1}{\rho_0} \frac{m'}{\tau'} \frac{\partial m'}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{Pr \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 D \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) + J, \end{aligned} \quad (4.3)$$

4. Уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w) = 0, \quad (4.4)$$

5. Уравнение гидростатики

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{m' H_s}, \quad (4.5)$$

где  $t$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $z$  – время, широта, долгота и высота, как независимые переменные;  $u$ ,  $v$  и  $T$  – зональная и меридиональная компоненты скорости (положительные в направлении на восток и на север) и температура, как прогностические переменные;  $w$  и  $\Phi$  – вертикальная компонента скорости и геопотенциальная высота, как диагностические переменные;  $p_s$ ,  $M_s$ ,  $\rho_s$  и  $H_s$  – давление, молекулярная масса, плотность и шкала высот на некотором уровне отсчета в атмосфере (например, на земной поверхности);  $\alpha$  – скорость ньютоновского охлаждения;  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $D$  – коэффициент турбулентной и молекулярной диффузии;  $f$  – параметр Кориолиса;  $F_\lambda$  и  $F_\varphi$  – зональный и меридиональный источники импульса;  $J$  – приток тепла;  $\kappa$  – коэффициент молекулярной теплопроводности;  $A_{mn}$  – тензор ионного трения;  $M$  – молекулярная масса;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $p$  – давление;  $Pr$  – турбулентное число Прандтля;  $r$  – радиус Земли;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $\rho$  – плотность;  $\rho_0 = \rho_s \exp(-z/H_s)$  – фоновая плотность;  $T_0$  – фоновая температура;  $\tau' = T/T_0$ ;  $m' = M/M_0$ ;  $u_i$  и  $v_i$  – горизонтальные компоненты скорости дрейфа ионов.

Выше тропопаузы модель КОММА учитывает процессы радиационного нагревания и охлаждения атмосферы за счет газовых составляющих NO, O, O<sub>2</sub>, O<sub>3</sub>, H<sub>2</sub>O и CO<sub>2</sub>. Используются параметризации нагревания атмосферы в ультрафиолетовой и видимой областях спектра от 125 до 700 нм, а также охлаждения в 8; 9,6; 14 и 15 мкм полосах инфракрасного излучения.

Для высот нижней термосферы учитываются дополнительные источники тепла, а также ионное торможение, повышающее трение в ионизированной среде. Учитываются также коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности. Турбулентная диффузия сглаживает градиенты в ветре и температуры. В модели предусмотрена возможность возбуждения коротких и длинных волн планетарного масштаба на поверхности Земли. Учитываются также латентные и явные тепловые потоки. Предусмотрена возможность изменения альбедо подстилающей поверхности.

На нижней границе (поверхность Земли) задается условие, позволяющее возбуждение стоячих планетарных волн и имеющее вид

$$\Phi(\lambda, \Theta, t) = f(t)h(\varphi)(\Phi_1 \cos \lambda + \Phi_2 \cos 2\lambda), \quad (4.6)$$

$h(\varphi) = \sin^2[(\varphi - 30)\pi / (60 - (\varphi - 60)/3)]$  при  $30^\circ$  с.ш.  $< \varphi < 82,5^\circ$  с.ш. и  $h(\varphi) = 0$  на других широтах,  $f(t) = 1 - \exp(-t/t_0)$  при  $t_0 = 2,5 \times 10^5$  с;  $\Phi_{1,2}$  – максимальные амплитуды планетарных волн с зональными числами 1 и 2. На верхней границе (высота 150 км) задается типичное граничное условие  $w = 0$ .

Расчеты проводятся для высот от 0 до 150 км, однако погодные изменения в тропосфере фактически не моделируются. Модель позволяет применить ассимиляцию экспериментальных данных о динамике нижней атмосферы для моделирования воздействия тропосферы на динамические процессы в средней атмосфере. Возможно также «подключение» модели КОММА к практически любой численной модели общей циркуляции нижней атмосферы для совместных численных экспериментов в нижней и средней атмосфере.

#### 4.1.2. Численная схема

Основные рассчитываемые моделью параметры: зональная,  $u$ , меридиональная,  $v$ , и вертикальная,  $w$ , компоненты скорости, геопотенциал,  $\Phi$ , и температура,  $T$ . Использована явная конечно-разностная схема с добавлением небольших диффузионных слагаемых. По сравнению со спектральными методами, использованная схема более удобна для моделирования переноса химических примесей и для ассимиляции данных. Главное неудобство - относительно короткий шаг по времени, составляющий несколько минут. Вторая проблема связана с сингулярностью сферической сетки на полюсах. Для поддержания устойчивости решения применяется фильтр

Фурье, который ограничивает зональное разрешение приблизительно до 500 км. Для поглощения накапливающейся энергии возмущений подсеточного масштаба к полям ветра и температуры применяется фильтр Шапиро 8-го порядка. Численная схема достаточно устойчива. Было выполнено детальное тестирование модели на отсутствие паразитных осцилляций численной природы.

Шаги горизонтальной сетки модели составляют  $\Delta\lambda = 5,6^\circ$  по долготе и  $\Delta\varphi = 5^\circ$  по широте (от  $87,5^\circ$  ю.ш. до  $87,5^\circ$  с.ш.). Вертикальная сетка модели имеет постоянный шаг по координате  $z = H \ln(p_0/p)$ , где  $p_0$  – приземное давление. Различные версии модели имеют 24, 48 или 118 узлов по вертикали с шагом  $\Delta z = 5,4; 2,7; 1,1$  км, соответственно. Шаг интегрирования по времени составляет  $\Delta t = 450$  с.

В целом описанная численная схема достаточно устойчива. При проведении расчетов возможен постоянный контроль устойчивости по критерию Леви-Куранта (ЛК). Программа периодически выдает на печать значения ЛК. Числа меньше 10 указывают на уменьшение устойчивости схемы, которое может привести к проблемам. Значения меньше 1 обычно означают неустойчивости и прекращение работы программы.

#### **4.1.3. Параметризации гравитационных волн.**

Уравнения численной модели (4.1) – (4.3) содержат источники импульса,  $F_\lambda$  и  $F_\varphi$ , а также тепла,  $J$ . По современным представлениям для адекватного моделирования общей циркуляции средней атмосферы указанные источниковые члены уравнений гидродинамики должны включать ускорения среднего потока и притоки тепла, создаваемые внутренними гравитационными волнами (ВГВ), имеющими периоды от 5 мин до суток.

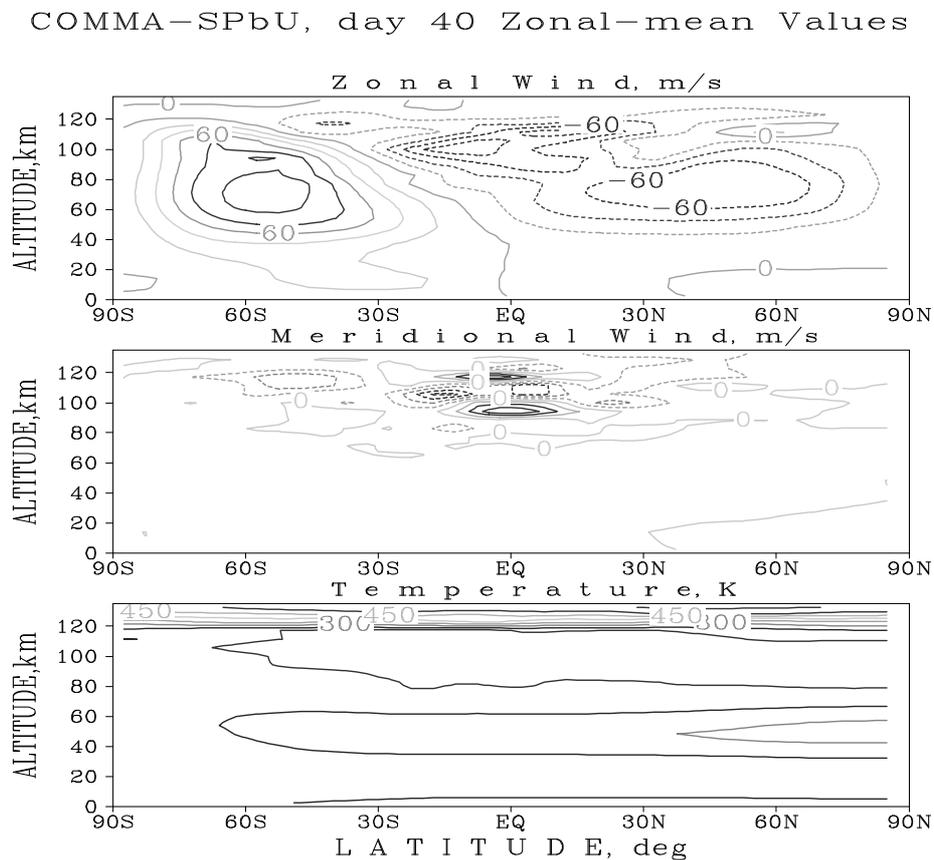
В исходной модели КОММА используется две схемы параметризации динамического эффекта ВГВ: широко распространенная схема, разработанная Линдzenом в 1981 г. и аппроксимация релеевского трения. Схема Линдзена требует задания реалистичного волнового спектра. Включена также параметризация притоков тепла, создаваемых диссипирующими ВГВ.

Накопленный разными авторами опыт применения простых параметризаций ВГВ в численных моделях общей циркуляции средней атмосферы показал их ограниченность. Поэтому в рамках данного проекта при разработке версии модели КОММА-СПбУ значения  $F_\lambda$ ,  $F_\varphi$  и  $J$  в уравнениях (4.1) – (4.3) рассчитываются по численной модели распространения и разрушения спектра ВГВ.

#### 4.1.4. Результаты моделирования.

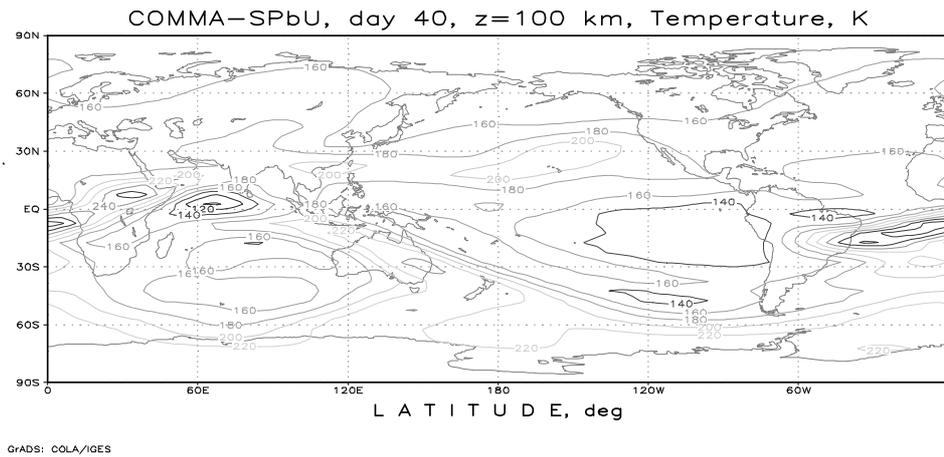
На рис. 4.1 приведены рассчитанные по модели КОММА-СПбУ для июля месяца примеры высотно-широтных распределений компонент скорости ветра и температуры. Модель воспроизводит течения, направленные на восток в зимнем (южном) полушарии и на запад в летнем (северном) полушариях. Использование уточненной параметризации радиационного охлаждения позволяет получить более реалистичные распределения температуры средней атмосферы, которая имеет минимум на мезопаузе вблизи летнего (северного) полюса. Улучшается также распределение среднего ветра в страто-мезосферном струйном течении на

Рис. 4.1.

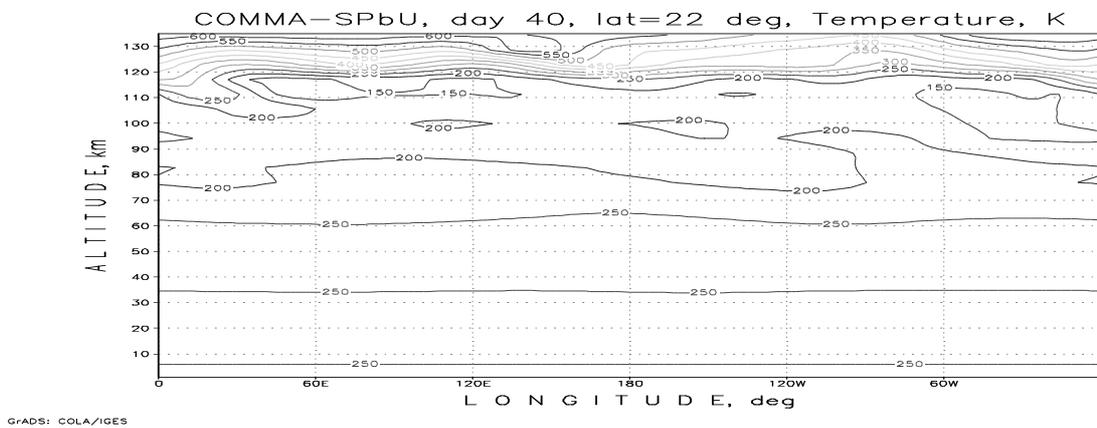


**Рис. 4.1.** Усредненные по долготе зональный и меридиональный ветер и температура, рассчитанные по модели КОММА-СПбУ при интегрировании на 20 дней с уточненной параметризацией радиационного выхолаживания атмосферы.

Рис. 4.2 и Рис. 4.3 представляют широтно-долготное и высотно-долготное распределения температуры, рассчитанные при фиксированных высоте и широте, соответственно, по модели КОММА-СПбУ с уточненной параметризацией радиационного охлаждения. Видно, что распределения температуры имеют неоднородную структуру, вызванную распространением планетарных волн и волн меньшего масштаба.



**Рис. 4.2.** Широтно-долготное распределение температуры, рассчитанное по модели КОММА-СПбУ для июля на высоте 100 км.

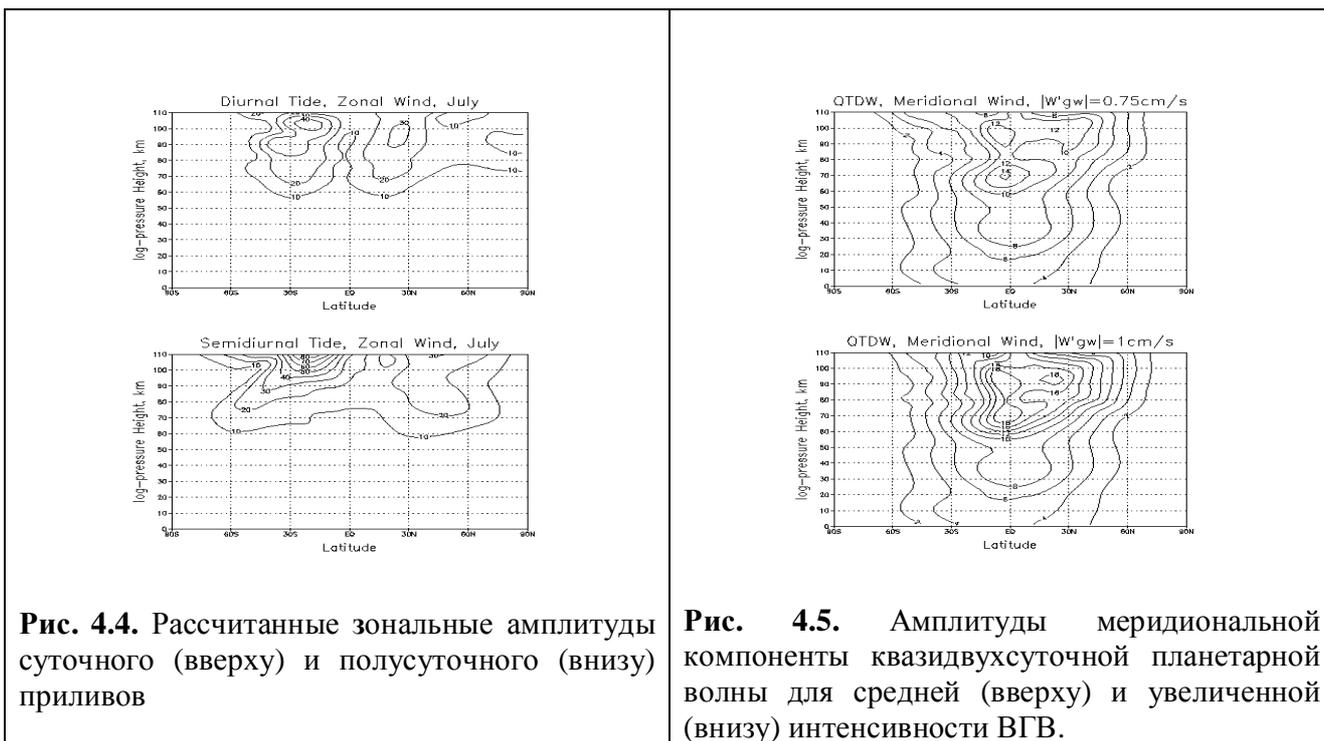


**Рис. 4.3.** Высотно-долготное распределение температуры, рассчитанное по модели КОММА-СПбУ для июля.

Численная модель КОММА позволяет также рассчитывать амплитуды приливных и планетарных волн в атмосфере. На рис. 4.4 приведен пример амплитуд суточного и полусуточного приливов, выделенные с помощью Фурье-анализа из полей зональной скорости

ветра, рассчитанных по модели КОММА. Результаты моделирования суточного прилива достаточно хорошо согласуются со спутниковыми данными.

Рис. 4.5 иллюстрирует влияние усиления ВГВ в атмосфере на планетарную квазидвухсуточную волну. Увеличение интенсивности ВГВ приводит к ослаблению восточных ветров вблизи стратоспаузы. Это приводит к более предпочтительным условиям распространения квазидвухсуточной волны в средней атмосфере северного полушария.



## 4.2. Модель мезомасштабной метеорологии HIRLAM.

Численная модель высокого разрешения на ограниченной территории HIRLAM (High Resolution Local Area Model) разработана и используется в рамках одноименного проекта, в котором участвует ряд стран Евросоюза (Дания, Финляндия, Исландия, Ирландия, Нидерланды, Норвегия, Испания и Швеция). Система моделей HIRLAM полностью приспособлена для численного прогноза погоды. Она включает анализ и ассимиляцию стандартных и нестандартных метеорологических данных, а также численную прогностическую модель на ограниченной территории с широким набором физических параметризаций. Прогностическая модель существует как в сеточной, так и в спектральной версии. Большинство приложений

использует сеточную версию. Спектральная версия используется, в основном, для ассимиляции данных. Существует также негидростатическая версия модели HIRLAM.

В качестве вертикальной координаты в модели используется «гибридная координата»  $\eta$ , которая определяется из соотношения

$$p = [A(\eta) + B(\eta)p_s(\lambda, \theta)]\eta, \quad (4.7)$$

где  $p_s$  – приземное давление,  $\lambda$  и  $\theta$  – долгота и дополнение широты до  $\pi/2$  (коширота), соответственно. Функции  $A(\eta)$  и  $B(\eta)$  подбираются так, чтобы получить желаемое приближение гибридной координаты к изобарической системе при  $B = 0$ , либо к  $\sigma$ -координате. Уравнения модели в гибридной системе координат включает

а) уравнение неразрывности

$$\left(\frac{d_h}{dt} + D\right)\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) = 0; \quad \frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_h \cdot \nabla_h; \quad D = \nabla_h \cdot \vec{v}_h, \quad (4.8)$$

где индекс  $h$  обозначает горизонтальную компоненту.

б) Уравнение притока тепла

$$\frac{dT}{dt} = \left[\frac{\kappa T[1 + (1/\varepsilon - 1)q]}{1 + (\delta - 1)q}\right] \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + P_T + K_T; \quad \frac{d}{dt} = \frac{d_h}{dt} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (4.9)$$

где  $P_T$  и  $K_T$  обозначают притоки тепла и диффузионные члены, соответственно.

в) Уравнение движения

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\Phi - f\vec{k} \times \vec{v} + \vec{P}_u + \vec{K}_u. \quad (4.10)$$

где  $\Phi$  – геопотенциал,  $f$  – параметр Кориолиса,  $P_u$  и  $K_u$  – источниковые и диффузионные члены.

г) Уравнения для удельной влажности воздуха  $q$  и водосодержания облаков  $m$

$$\frac{dq}{dt} = P_q + K_q; \quad \frac{dm}{dt} = P_m + K_m, \quad (4.11)$$

где  $P_i$  и  $K_i$  обозначают соответствующие источниковые и диффузионные члены.

В сеточной версии модели используются конечно-разностные аналоги уравнений (4.8) – (4.11). По гибридной вертикальной координате используется расштанная сетка, причем скорость ветра  $\vec{v}_k$ , температура  $T_k$ , удельная влажность  $q_k$  определяются в узлах основной сетки с номерами  $k = 1, 2, \dots, N$ . Давление  $p_{k+1/2}$ , геопотенциал  $\Phi_{k+1/2}$  и вертикальная скорость

$\dot{\eta}_{k+1/2}$  определяются в промежуточных узлах, расположенных в середине между основными узлами. Для дискретизации по горизонтальным координатам используется расшатанная сетка типа сетки С на рис. 3.12 для горизонтальных компонент ветра  $u$ ,  $v$  и температуры  $T$ . Поля  $q$  и  $m$  задаются в тех же узлах сетки, где задана температура. Вертикальная скорость определяется в этих же горизонтальных узлах, но на половинных промежуточных уровнях по гибридной высоте.

Для подавления вычислительных и паразитарных гармоник используются различные численные фильтры, а именно:

- а) Изменение длины последовательных шагов по времени для подавления двухшаговых волн

$$\Delta t_{\pm} = (1 \pm \varepsilon_g) \Delta t. \quad (4.12)$$

При практических расчетах используется значение  $\varepsilon_g = 0.1$ .

- б) Искусственная горизонтальная диффузия для подавления нереально больших градиентов рассчитываемых полей. Для диффузионного сглаживания поля любой переменной  $f$  решается следующее диффузионное уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + K \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (4.13)$$

где  $K$  – коэффициент диффузии, величина которого подбирается исходя из величины временных и пространственных шагов, используемых в расчетах.

- в) Частотный фильтр для подавления паразитарных нелинейных волн. Для фильтруемой величины  $\psi$  на  $n+1/2$  шаге по времени фильтрованное значение вычисляется как

$$\psi_{n+1/2} = \frac{3\psi_n - \zeta_{n-1}}{2}, \quad \zeta_n = \psi_n + \varepsilon_N (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \zeta_{n-1}). \quad (4.14)$$

Этот фильтр действует только на нелинейные члены и оставляет без изменения линейные члены. Это приводит к минимальной потере точности. При вычислениях используется значение  $\varepsilon_N = 0.1$ .

При моделировании динамических процессов на ограниченной территории необходимы граничные условия на горизонтальных границах области. В модели HIRLAM для их задания используются результаты расчетов и ассимиляции данных по климатической численной модели, покрывающей большую территорию. Поскольку эта модель использует другие уравнения, а результаты наблюдений содержат погрешности, возможна несогласованность решений, а также

большие градиенты рассчитываемых величин и генерация паразитарных волн вблизи границы области.

Для лучшего согласования граничных условий используется процедура релаксации полей внутренней модели к полям внешней модели. Для этого горизонтальная область, в которой работает внутренняя модель, окружается буферной зоной из  $n$  точек сетки. Внутри этой зоны значения моделируемых полей вычисляются по интерполяционной формуле

$$\phi_i = (1 - \alpha_i)\phi_i^I + \alpha_i\phi_i^E, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.15)$$

где индексы  $I$  и  $E$  относятся к полям, рассчитываемым внутренней и внешней численными моделями, а значения параметра  $\alpha_i$  меняются от 0 до 1 внутри этой буферной релаксационной зоны. В модели HIRLAM используется аналитическая зависимость

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \{1 + \cos[\pi(i-1)/n]\}. \quad (4.16)$$

На верхней границе области моделирования полагается нулем гибридная вертикальная скорость  $\dot{\eta} = 0$ . Для этого условия нет физических обоснований, и оно может создать паразитное отражение волн от верхней границы. Для ослабления этого отражения используется поглощающий слой вблизи верхней границы, в котором задаются увеличенные значения коэффициента диффузии в (4.13). Такой слой поглощает энергию волн, подходящих к границе из области интегрирования, а также волн, отраженных от верхней границы, что препятствует их возвращению в область интегрирования.

На нижней границе области интегрирования в вязкой атмосфере используется условие прилипания, т.е. равенство нулю скорости ветра.

(b) (c)

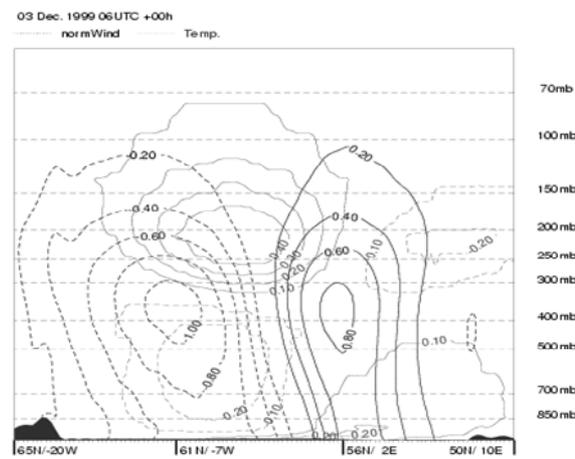
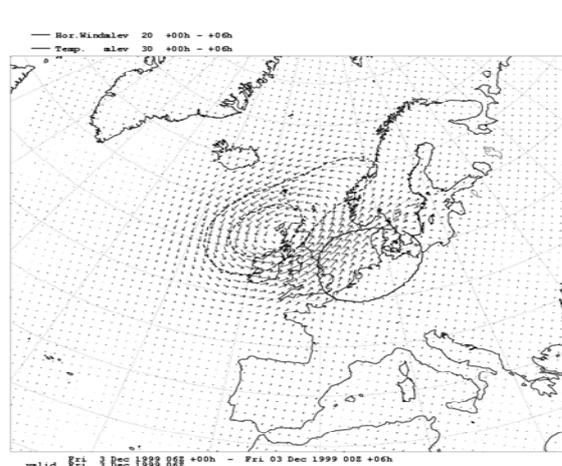


Рис. 4.6. Пример расчета по модели HIRLAM распределений ветра и температуры во время шторма в Дании на изобарической поверхности 500 гПа (слева) и в вертикальной плоскости, ориентированной с северо-запада на юго-восток.

### 4.3. Модель мезомасштабной метеорологии MM5.

Другой широко используемой мировым научным сообществом численной моделью атмосферной динамики является мезомасштабная модель, известная как MM5. Она была разработана совместно учеными из Пенсильванского университета и из Национального центра атмосферных исследований (NCAR) в США. Эта негидростатическая модель для ограниченной территории с учетом орографии в  $\sigma$ -координатах, разработанная для моделирования и предсказания мезомасштабных метеорологических процессов. К модели добавлено несколько программ, делающих предварительную подготовку данных и последующий анализ результатов. Вместе они образуют систему численного моделирования MM5. Модель поддерживается и свободно распространяется группой мезомасштабного моделирования NCAR.

Модель MM5 используется для теоретических исследований, ассимиляции данных и предсказаний эволюции муссонов, тайфунов и циклонов. В малых масштабах (2 – 200 км) модель MM5 может использоваться для исследований мезомасштабных конвективных систем, фронтов, бризов на границах море-суша, циркуляций в горных долинах, «тепловых островов» в городах и т.п.

В модели MM5 рассчитываются компоненты скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и динамические отклонения давления  $p'$ , плотности  $\rho'$  и температуры  $T'$  от гидростатических фоновых значений  $p_0$ ,  $\rho_0$  и  $T_0$ , соответствующих покоящейся атмосфере. В качестве вертикальной координаты используется

$$\sigma = \frac{p_0 - p_t}{p^*}, \quad p^* = p_s - p_t, \quad (4.17)$$

где  $p_s$  и  $p_t$  – значения  $p_0$  на поверхности Земли и на верхней границе исследуемого слоя, соответственно. При таком определении  $\sigma$  всегда уменьшается от 1 до 0 при перемещении от нижней до верхней границы исследуемого слоя атмосферы. Рабочие уравнения негидростатической модели MM5 записываются в следующем виде:

а) уравнение для давления (получается из уравнений притока тепла и неразрывности)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g w + \gamma p \nabla^2 \bar{v} = -\bar{v} \nabla p' + \frac{\gamma p}{T} \left( \frac{Q}{c_p} + \frac{T_0}{\theta_0} D_\theta \right), \quad (4.18)$$

где  $Q$  – полный приток тепла,  $D_\theta$  – диффузионный член.

б) Уравнения для компонент скорости ветра

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{M}{\rho} \left( \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right) = -\bar{v} \nabla u + v \left( f + u \frac{\partial M}{\partial y} - v \frac{\partial M}{\partial x} \right) - ew \cos \alpha - \frac{uw}{a} + D_u; \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{M}{\rho} \left( \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right) = -\bar{v} \nabla v + u \left( f + u \frac{\partial M}{\partial y} - v \frac{\partial M}{\partial x} \right) - ew \sin \alpha - \frac{vw}{a} + D_v; \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{p^*} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} + \frac{gp'}{\gamma p} = -\bar{v} \nabla w + g \frac{p_0 T'}{p T_0} - g \frac{R_d p'}{c_p p} + e(u \cos \alpha - v \sin \alpha) - \frac{u^2 + v^2}{a} + D_w; \quad (4.21)$$

где  $f=2\Omega \sin \varphi$  - параметр Кориолиса,  $\varphi$  - широта,  $a$  – радиус Земли,  $D_u, D_v, D_w$  – диффузионные члены. Кроме того, учтены обычно пренебрегаемые компоненты силы Кориолиса, причем  $e = 2\Omega \cos \varphi$ ,  $\alpha = \lambda - \lambda_c$ , где  $\lambda$  - долгота, а  $\lambda_c$  – долгота центра изучаемой области атмосферы. В (4.19) – (4.21) масштабные множители  $M$  учитывают изменение горизонтальных масштабов из-за кривизны Земли и применяемой картографической проекции (см. (1.48) в п. 1.7).

в) Уравнение притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\bar{v} \nabla T + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{v} \nabla p' - \rho_0 g w \right) + \frac{Q}{c_p} + \frac{T_0}{\theta_0} D_\theta, \quad (4.22)$$

В этих уравнениях адвективные члены описываются выражениями

$$\bar{v} \nabla A = Mu \frac{\partial A}{\partial x} + Mv \frac{\partial A}{\partial y} + \bar{\sigma} \frac{\partial A}{\partial \sigma}, \quad (4.23)$$

где  $\bar{\sigma}$  - аналог вертикальной скорости для  $\sigma$ -координаты (4.17), которая определяется как

$$\bar{\sigma} = -\frac{\rho_0 g}{p^*} w - \frac{M \sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} u - \frac{M \sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} v. \quad (4.24)$$

Система уравнений также содержит уравнения для водяного пара и облаков, аналогичные (3.11), когда эти процессы оказываются существенными.

При дискретизации уравнений (4.19) – (4.24) по горизонтальным координатам используется расштанная сетка, обозначенная как В на рис. 3.12. Для модели ММ5 эта сетка изображена на рис. 4.7.

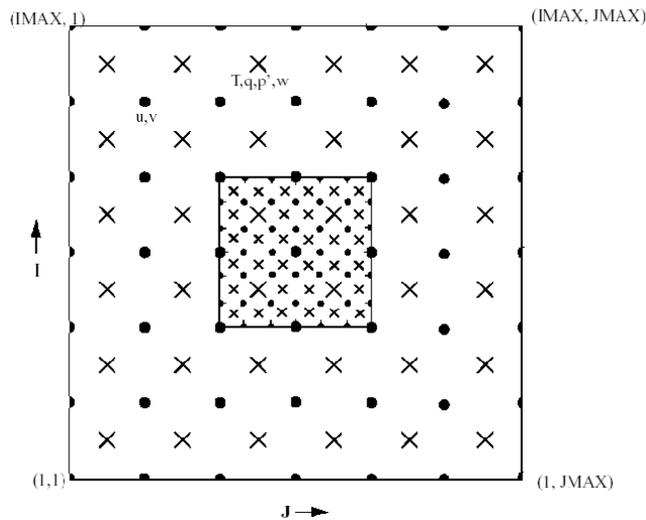


Рис. 4.7. Схема горизонтальных сеток модели MM5. Крестики обозначают узлы, в которых задаются значения  $T, q, p', w$ , а точки – узлы для задания горизонтальных компонент скорости  $u$  и  $v$ . Показана также вложенная область с лучшим горизонтальным разрешением, где шаги горизонтальной сетки уменьшены в три раза.

Согласно (4.17), вертикальная координата  $\sigma$  меняется от 1 на нижней границе до 0 на верхней границе области интегрирования. Вертикальная сетка модели покрывает этот диапазон изменений  $\sigma$ , причем сетка не обязательно имеет постоянный шаг. Обычно разрешение в приземном слое лучше, чем в более высоких областях атмосферы. Количество высотных уровней меняется от 10 до 40, хотя, в принципе, оно не ограничено. Пример распределения высотной сетки показан на рис. 4.8.

При построении конечно-разностной аппроксимации все величины, кроме вертикальной скорости, задаются на «половинных уровнях», расположенных в центрах сеточных слоев и показанных пунктиром на рис. 4.8. Вертикальные скорости задаются на уровнях с целыми номерами (сплошные линии на рис. 4.8). В областях резких градиентов используется их сглаживание путем осреднения.

Уравнения (4.18) – (4.22) записаны таким образом, что в их левых частях сосредоточены «быстрые члены», описывающие распространение акустических волн и требующие малого шага интегрирования по времени. Для интегрирования по времени используются явные схемы центральных разностей второго порядка точности, когда тенденции, рассчитанные на  $n$ -ом шаге по времени, используются для перехода от  $n - 1$  значения к  $n + 1$  значению. Такая схема применяется к большинству членов уравнений (3.18) – (3.22), стоящих в их правых частях (адвекция, сила Кориолиса, силы плавучести). Для диффузионных и некоторых

микрофизических процессов используются вперед направленные схемы первого порядка, когда для получения значения с индексом  $n + 1$  из  $n - 1$ -го значения используются тенденции, вычисленные на  $n - 1$  временном шаге. Некоторые радиационные и облачные характеристики рассчитываются через интервалы времени, соответствующие многим временным шагам модели (например, с интервалом 30 мин).

Для устойчивости интегрирования быстрых членов, стоящих в левых частях уравнений (4.18) – (4.22), требуется более мелкие шаги по времени, чем для медленных членов. В этом случае производится разбиение шагов, и некоторые величины рассчитываются чаще. Например, для корректного описания акустических волн переменные  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $p'$  обновляются на каждом коротком подшаге, когда члены правой части фиксированы. Для акустических волн обычно берется четыре таких подшага между временами  $t_{n-1}$  и  $t_{n+1}$ , как это показано на рис. 4.9.

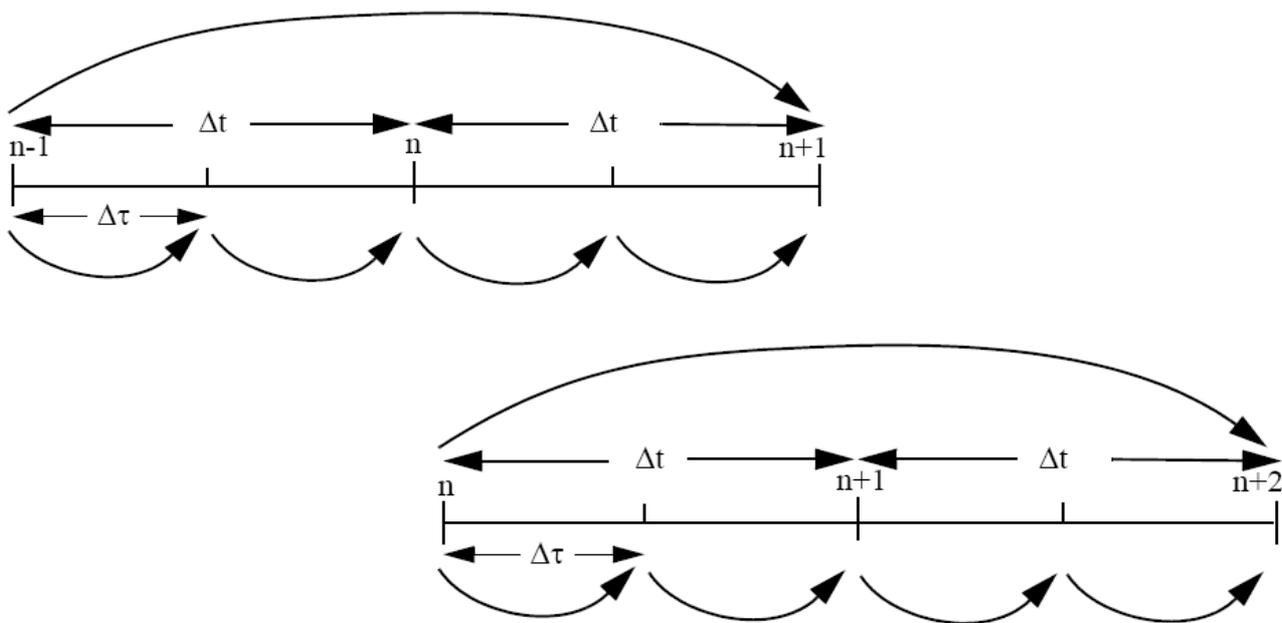


Рис. 4.9. Схема более длинных шагов по времени для медленных членов уравнений (верхние части) и быстрых членов (нижние части).

В некоторых случаях (одномерное распространение звука, вертикальная диффузия) используются неявные схемы, устойчивые при любых шагах по времени. В указанных простых случаях матрицы алгебраических уравнений тридиагональны и допускают аналитическое решение уравнений.

В MM5 используется ряд параметризаций для описания радиации, микрофизики и динамики облаков, взаимодействия с земной поверхностью и т.п. Схема взаимодействий этих параметризаций показана на рис. 4.10.



Рис. 4.10. Схема взаимодействия параметризаций взаимодействия атмосферы и подстилающей поверхности, физических процессов в приземном слое, радиационных процессов, Микрофизики аэрозоля и фотохимии, процессов в облаках.

Граничные условия модели MM5, во-первых, ставятся на горизонтальных границах области интегрирования. Возможно задание трех типов условий:

а) *Фиксированные значения* переменных на границе. Могут применяться только для грубых оценок и не рекомендуются при использовании реальных данных.

б) *Зависящие от времени значения*, задаваемые в двух внешних строках и колонках сетки. Такие условия рекомендуются для вложенной области высокого разрешения (см. рис. 4.1.), когда граничные условия берутся из решений в более обширной внешней области. Эти условия не рекомендуются, если можно задать зависящие от времени значения только в единственной внешней строке и колонке сетки.

в) *Релаксационные*. Зависящие от времени граничные значения задаются в одной внешней строке и одном внешнем столбце сетки. В последующей «зоне релаксации» выполняется интерполяция (релаксация) решений уравнений к граничному условию типа (4.15).

В качестве нижних граничных условий можно задавать распределения температур на поверхности океана и земной поверхности, распределение снежного и ледового покрова, которые задаются в виде файлов с данными.

Условия на верхней границе области интегрирования могут задаваться двух типов.

а) Во-первых, это может быть «*твердая крышка*», когда полагается нулем вертикальная скорость на верхней границе. Может применяться для грубого моделирования при шагах сетки 50 км и более.

б) *Условие излучения*, при котором вертикальная скорость вычисляется из условия уменьшения отражения волновой энергии от верхней границы модели. Это уменьшает вычислительные искажения, особенно над горами. Это условие рекомендуется для шагов сетки менее 50 км. Условие лучше работает в области масштабов гидростатических гравитационных волн, чем для инерционных или негидростатических волн.

Вложение областей интегрирования. В модели MM5 возможно задание подобластей с меньшими шагами сетки интегрирования. Можно задавать до 9 подобластей с 4-мя уровнями уменьшения шага (в 3 раза на каждом уровне – см. рис. 4.1). Результаты расчетов на более грубой сетке могут запоминаться и затем использоваться в качестве зависящих от времени граничных условий для вложенной области с мелким шагом. В самосогласованных экспериментах вычисления на крупной и мелкой сетках ведутся одновременно. В этом случае расчеты с лучшим разрешением могут использоваться для уточнения результатов более грубой сетки.

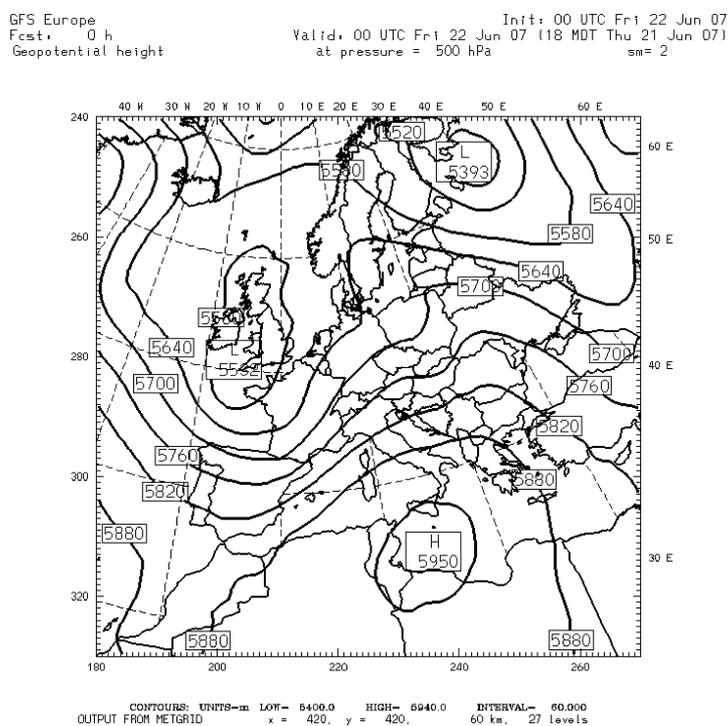


Рис. 4.11. Пример расчета геопотенциальных высот изобарической поверхности 500 мб за 22 июня 2007 г. над Европой с помощью полусферной версии модели MM5.

GFS Europe  
Fcst: 0 h  
Sea-level Pressure

Init: 00 UTC Fri 22 Jun 07  
Valid: 00 UTC Fri 22 Jun 07 (18 MDT Thu 21 Jun 07)  
sm= 1

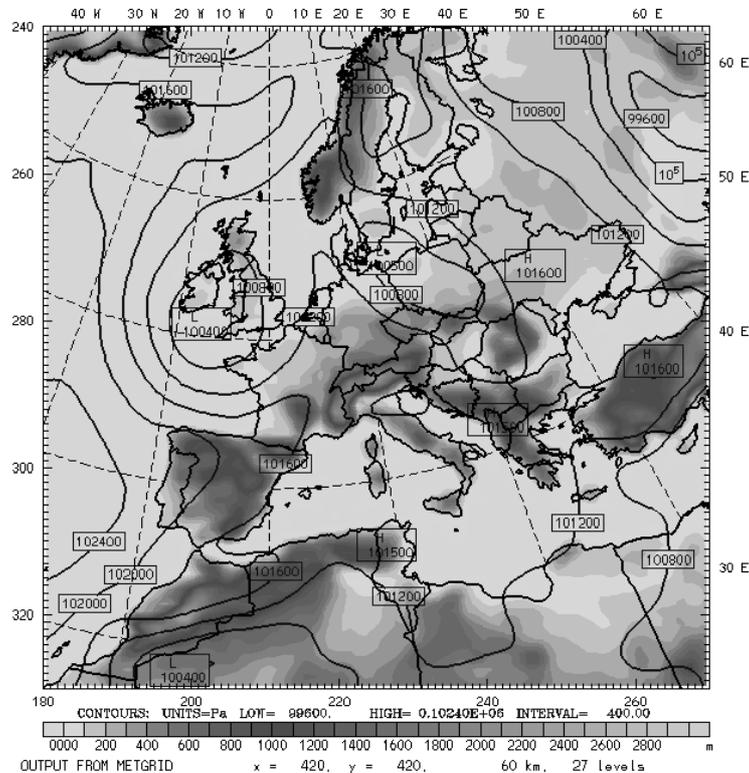


Рис. 4.12. Прогноз осадков на земной поверхности для 22 июня 2007 г по модели MM5.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Борисенков Е. П., В. П. Гуров, С. И. Титов. Динамика атмосферы и численные методы прогноза. Ленинград, 1967.
2. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Ч.1. Гидрометеиздат, 1979.
3. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Ч.2. Ред. А. Касахара. Гидрометеиздат, 1982.
4. Модели общей циркуляции атмосферы. Ред. Ю. Чанг. Гидрометеиздат, 1981.
5. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л: Гидрометеиздат, 1974.